

弱内射模与弱内射维数

张 龙

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :首先对内射模的概念进行推广 ,定义了弱内射模、弱内射维数及弱整体维数 ,并讨论弱内射维数为 0 和 1 的模的性质 ;其次 ,利用弱内射模的定义对内射模的 Schanuel 引理进行推广 .
关键词 :内射模 ;Schanuel 引理 ;弱内射维数 ;弱整体维数
中图分类号 :O15 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2003)04-0482-03

内射模是同调代数与模论的主要研究对象之一^[1~3] ,而同调代数与模论在代数几何、代数数论等学科中有着广泛的应用 .为此 ,本文对内射模进行推广 ,定义了包含范围更广的模类——弱内射模 ,并在此基础上定义了弱内射维数与弱整体维数 ,对弱内射维数为 0 和 1 的模类的性质进行了讨论 .

Schanuel 引理在模论的研究中发挥了重要的作用 ,本文引进弱内射模的定义 ,并将关于内射模的 Schanuel 引理进行了推广 .

设 E 是内射左 R -模 , M, N 是左 R -模 ,且 M 是 N 的子模 , R 为环 ,那么 ,从 M 到 E 的每一个同态都可以在 N 到 E 上进行开拓 .然而 ,若 E 是弱内射模 ,以上结论不成立 ,本文对在弱内射模定义中能进行开拓的同态组成的集合进行了讨论 .

本文中 R 表示有单位元的环 , R -模均为左 R -西模 , $\text{Hom}_R(M, N)$ 表示 R -模 M 到 N 的同态 , $l_{\text{Hom}_R(M, N)}\alpha = \{\eta \mid \eta\alpha = 0, \eta \in \text{Hom}_R(M, N)\}$, $r_{\text{Hom}_R(M, N)}\alpha = \{\eta \mid \alpha\eta = 0, \eta \in \text{Hom}_R(M, N)\}$.

定义 1 设 T, N 为 R -模 ,对于 N 的任意非零子模 M ,若存在 $0 \neq \alpha \in \text{Hom}_R(M, T)$,使得对于 $\forall \beta \in \text{Hom}_R(M, T)$ 满足 $\text{Ker}\alpha \subseteq \text{Ker}\beta$ 都有 $\gamma \in \text{Hom}_R(N, T)$ 使 $\beta = \gamma\alpha$ 成立 ,即有如图 1 所示的交换图 ,则称 T 为 N -弱内射模 , α 为 T 与 M 相伴的同态 .

定义 2 若对于任意的 R -模 N , R -模 T 都是 N -弱内射的 ,则称 T 为弱内射模 .

由内射模以及弱内射模的定义可以容易得到以下命题 :

命题 1 内射模为弱内射模 .

由文献 [2] 知 ,对于任意的 R -模 N 必有内射分解 ,故易见有以下结论 :

命题 2 对于任意的 R -模 N ,都有 R -模正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots \rightarrow T_n \rightarrow T_{n+1} \dots$ (其中 T_j 为弱内射模 , $j = 0, 1, 2, \dots$) .

由命题 2 ,可得如下定义 :

定义 3 对于 R -模 N , T_j 为弱内射模 ,称正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots \rightarrow T_n \rightarrow T_{n+1} \dots$ 为 N 的一个弱内射分解 .记 N 的弱内射维数为 $\text{Wlid}(N) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \rightarrow N \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots \rightarrow T_n \rightarrow 0\}$;当 n 不存在时规定 $\text{Wlid}(N) = \infty$.记 $\text{Wlid}(R) = \sup\{\text{Wlid}(N) \mid \forall N \text{ 为 } R\text{-模}\}$ 为环 R 的弱整体维数 .

命题 3 设 N 为 R -模 ,则以下结论成立 :

(a) $\text{Wlid}(N) = 0 \Leftrightarrow N$ 为弱内射 R -模 ;

(b) $\text{Wlid}(N) \leq 1 \Leftrightarrow \exists T_0, T_1$ 为弱内射 R -模及满同态 $f \in \text{Hom}_R(T_0, T_1)$ 使得 $N \cong \text{Ker}f$;

(c) $\text{Wlid}(R) = 0 \Leftrightarrow$ 一切 R -模都是弱内射模 .

证明 (a) 对于任意的 R -模 N ,由弱内射维数的定义知 $\text{Wlid}(N) = 0$ 等价于存在弱内射模 T_0 使得 $0 \rightarrow N$

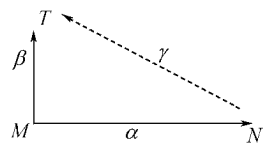


图 1 交换图
Fig.1 Commutative diagram

$\rightarrow T_0 \rightarrow 0$, 故 N 为弱内射模.

(b) 由弱内射维数的定义知 $\text{Wlid}(N) \leq 1 \Leftrightarrow \exists T_0, T_1$ 为弱内射 R -模, 使得有正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow T_0 \xrightarrow{f} T_1 \rightarrow 0$, 亦即 $N \cong \text{Ker} f$.

(c) 由弱整体维数的定义知 $\text{Wlid}(R) = 0 \Leftrightarrow$ 对于任意的 R -模 N 有 $\text{Wlid}(N) = 0$, 由 (a) 知这等价于一切 R -模都是弱内射模.

对于弱内射模与直积的关系有如下结论:

命题 4 若弱内射 R -模 $T = \coprod_{j \in J} T_j$ 则 T_j 为弱内射模.

证明 对于任意的 $j \in J$ 设 α_T 为 T 与 M 相伴的同态, $p_j \in \text{Hom}_R(T, T_j)$ 为标准投射, $\lambda_j \in \text{Hom}_R(T_j, T)$ 为标准内射. 对于任意满足 $\text{Ker} \alpha_T \subseteq \text{Ker} \beta_j$ 的 $\beta_j \in \text{Hom}_R(M, T_j)$, 令 $\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ 使得 $\varphi = \lambda_j \beta_j$, 则有 $\text{Ker} \alpha_T \subseteq \text{Ker} \beta_j \subseteq \text{Ker} \varphi$. 由 T 是弱内射模知, 存在 $t \in \text{Hom}_R(N, T)$ 且满足 $\varphi = t \alpha_T$. 再令 $\delta_j = p_j t \in \text{Hom}_R(N, T_j)$ 则有 $\delta_j \alpha_T = p_j t \alpha_T = p_j \varphi = p_j \lambda_j \beta_j = \beta_j$, 因而 T_j 为弱内射模.

众所周知, Schanuel 引理在模论的研究中具有重要作用, 以下就对内射模的 Schanuel 引理进行推广.

命题 5 设 C_0, C_1, N 均为 R -模, T_0, T_1 为弱内射模, N 为 T_0, T_1 的子模. $\alpha \in \text{Hom}_R(N, T_0)$ 为 T_1 与 N 的相伴同态, $\beta \in \text{Hom}_R(N, T_1)$ 为 T_0 与 N 的相伴同态, $f_j \in \text{Hom}_R(C_j, T_j)$ 其中 $j = 0, 1$ 为满同态. 若 $\text{Ker} \alpha = \text{Ker} \beta$ 且有如下实箭头行正合图 (图 2), 则 $T_0 \oplus C_1 \cong T_1 \oplus C_0$.

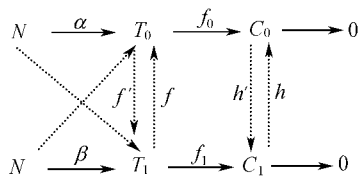


图 2 正合交换图

Fig.2 Exactly commutative diagram

证明 由命题假设知 $\alpha \in \text{Hom}_R(N, T_0)$, $\text{Ker} \alpha = \text{Ker} \beta$, T_0 为弱内射模, 故存在 $f \in \text{Hom}_R(T_1, T_0)$ 使得 $\alpha = f \beta$. 同理, 存在 $f' \in \text{Hom}_R(T_0, T_1)$ 使得 $\beta = f' \alpha$. 进一步地, 由图追踪法知, 存在 $h \in \text{Hom}_R(C_1, C_0)$ 及 $h' \in \text{Hom}_R(C_0, C_1)$, 使图 2 可交换.

设 $p_1 \in \text{Hom}_R(T_0 \coprod C_1, C_1)$, $p_2 \in \text{Hom}_R(T_0 \coprod C_1, T_0)$, $p'_1 \in \text{Hom}_R(T_1 \coprod C_0, C_0)$, $p'_2 \in \text{Hom}_R(T_1 \coprod C_0, T_1)$ 均为标准投射. 由直积的范性质知, 存在 R -模同态 $\Phi: T_1 \coprod C_0 \rightarrow T_0 \coprod C_1$ 使得 $p_1 \Phi = h' p'_1$ 且 $p_2 \Phi = h p'_2$. 同理, 存在 R -模同态 $\Phi': T_0 \coprod C_1 \rightarrow T_1 \coprod C_0$ 使得 $p'_1 \Phi = h p_1$ 且 $p'_2 \Phi' = h' p_2$. 再由直积的范性质的惟一性知 $\Phi \Phi' = I_{C_1 \coprod T_0}$, $\Phi' \Phi = I_{C_0 \coprod T_1}$. 故得 $T_0 \oplus C_1 \cong T_1 \oplus C_0$.

文献 4 中给出了 (M, P) 内射模的定义, 并给出了可进行开拓的同态之间的关系. 据此笔者在考虑弱内射模相关性质时得到了如下结果:

命题 6 设 T 为弱内射模, M, N 是 R -模且 M 是 N 的非零子模, α 为 T 与 M 的相伴同态, 令 $F = \text{Hom}_R(N, T)$ 则有 $l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha) = F \alpha$.

证明 显然有 $l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha) \supseteq F \alpha$. 下证 $l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha) \subseteq F \alpha$. 任取 $s \in l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha)$, 定义 $\delta: \alpha(M) \rightarrow s(M)$ 使 $\alpha(x) \rightarrow s(x)$, $\forall x \in M$. 易见如此定义是完全确定的. 同时还可看出 $\text{Ker} \alpha \subseteq \text{Ker} s$. 由 T 是弱内射模知, 存在 $\tau \in F = \text{Hom}_R(N, T)$ 满足 $s = \tau \alpha$, 即 $l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha) \subseteq F \alpha$. 综上所述可知 $l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha) = F \alpha$.

由命题 6 可得如下结果:

命题 7 设 T 为弱内射模, M, N 是 R -模且 M 是 N 的非零子模, α 为 T 与 M 的相伴同态, 令 $F = \text{Hom}_R(N, T)$ 则有 $l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F \alpha) = F \alpha = \{\beta \mid \text{Ker} \alpha \subseteq \text{Ker} \beta, \beta \in \text{Hom}_R(M, T)\}$.

证明 对于任意的 $g = f \alpha \in F \alpha$, 若任意的 $x \in \text{Ker} \alpha$, 有

$$g(x) = f \alpha(x) = 0$$

因而

$$\text{Ker} \alpha \subseteq \text{Ker} g$$

故

$$F \alpha \subseteq \{\beta \mid \text{Ker} \alpha \subseteq \text{Ker} \beta, \beta \in \text{Hom}_R(M, T)\}$$

再由 T 是弱内射模知

$$F\alpha \supseteq \{\beta \mid \text{Ker}\alpha \subseteq \text{Ker}\beta, \beta \in \text{Hom}_R(M, T)\}$$

由命题 6 知

$$l_{\text{Hom}_R(M, T)} r_{\text{Hom}_R(M, M)}(F\alpha) = F\alpha = \{\beta \mid \text{Ker}\alpha \subseteq \text{Ker}\beta, \beta \in \text{Hom}_R(M, T)\}$$

致谢: 本文在写作过程中得到朱晓胜教授的悉心指导与不倦的教诲, 在此表示衷心感谢!

参考文献:

- [1] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and categories of modules[M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 185—189.
- [2] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998. 118—143.
- [3] 周伯坝. 同调代数[M]. 北京: 科学出版社, 1998. 75—86.
- [4] AHMAD Shmsuddin. n -injective and n -flat modules[J]. Comm Alg, 2001, 29(5): 2039—2050.
- [5] NICHOLSON W K, YOUSIF M F. FP-rings[J]. Comm Alg, 2001, 29(1): 415—425.
- [6] FENG Liang-gui. Finitely generated modules and power stably free dimension[J]. Comm Alg, 2001, 29(12): 5335—5343.
- [7] CHEN Jian-long, DING Nan-qing, LI Yuan-lin, et al. On (m, n) -injectivity of modules[J]. Comm Alg, 2001, 29(12): 5589—5603.

Weak injective module and weak injective dimension

ZHANG Long

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract By extension of the concept of injective modules, the weak injective module, weak injective dimension, and weak global dimension are defined, and the characteristics of the modules are discussed for injective dimensions 0 and 1. Moreover, the Schanuel lemma on injective modules is extended based on the definition of weak injective module. Finally, the homomorphism set that can be extended in the definition of weak injective module is discussed.

Key words injective module; Schanuel lemma; weak injective dimension; weak global dimension

《河海大学学报(哲学社会科学版)》征订启事

(CN32-1521/C, ISSN1671-4970, 季刊, 自办发行)

本刊以马列主义、毛泽东思想和邓小平理论为指导, 坚持实事求是的思想路线, 贯彻“双百”方针, 弘扬时代主旋律, 理论联系实际, 为社会主义物质文明与精神文明建设服务。

本刊为哲学与社会科学类学术期刊, 主要刊登哲学、政治学、文学、史学、语言学、法学、社会学、心理学、经济学、管理学、高等教育学等社会科学方面的研究成果、学术论文、综述等学术性文章。本刊可供上述有关专业的研究人员、管理人员和大专院校师生阅读与参考。本刊为中国学术期刊(光盘版)入编期刊与中国学术期刊网入编期刊。

本刊由河海大学主办, 每季末出版, 国内外公开发行, 每期定价 5 元, 每期邮费 1 元, 全年订费 24 元。欢迎广大读者直接向编辑部订阅。联系地址: 南京市西康路 1 号《河海大学学报(哲学社会科学版)》编辑部, 邮政编码 210098。联系电话 (025) 8786376。