

用卡尔曼滤波求解河道糙率参数反问题

李光炽¹,周晶晏²,张贵寿³

(1. 河海大学水资源环境学院,江苏 南京 210098;2. 河海大学交通与海洋工程学院,江苏 南京 210098;
3. 绍兴文理学院土木工程系,浙江 绍兴 312000)

摘要 提出了用四点线性隐格式求解水流方程、用卡尔曼滤波求解河道糙率的一种求解河道水流及其糙率参数反问题的新方法,并应用于淮河水流计算.结果表明,计算水位与实测水位过程完全吻合.

关键词 河道 水流模拟 参数反分析 卡尔曼滤波

中图分类号 TV131.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2003)05-0490-04

河道水流模拟,未知参数通常采用试错法来确定,即先假定参数,再进行水流模拟计算,然后根据计算结果与实测值的差异程度人工判断是否要修改参数.如参数满足要求,则停止计算;否则修改参数重新进行计算,直到认为满意为止.这种方法存在如下问题:参数确定的标准不够明确,人为因素影响比较大,结果会因人而异;计算工作量较大,如没有一定的工作经验,则很难进行这项工作.为此,本文以河道洪水演进模拟的圣维南方程为例,对河道糙率参数反问题进行分析,以探讨一种可行有效的参数求解方法.

1 河道糙率参数反问题

描述河道水流运动的圣维南方程组为

$$\begin{cases} B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gn^2 \frac{|u|Q}{R^{4/3}} = 0 \\ f_a(Q, Z, t) = 0 & x = x_a \text{ (上边界条件)} \\ f_b(Q, Z, t) = 0 & x = x_b \text{ (下边界条件)} \end{cases} \quad (1)$$

式中: Q, A, B, Z ——河道断面流量、过水面积、河宽和水位; α ——动量校正系数; n ——河道糙率; R ——水力半径.当糙率参数 n 已知时,方程(1)构成普通的适定问题;若糙率 n 未知,要求由模型反求糙率参数时,方程(1)构成不适定问题,这时必须补充附加的信息才能求解.一般是已知 m 个断面的实测水位过程

$$Z^o(x_k, t) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \quad (2)$$

为求解满足方程(2)的糙率参数,构造如下泛函:

$$f(n) = \int_0^T \sum_{k=1}^m (Z^o(x_k, t) - Z(x_k, t))^2 dt \quad (3)$$

通过方程(3)的优化求解糙率参数.此时,求解糙率参数 n 的反问题变为:求解满足方程(1)的 Q, Z 和 n ,使得泛函(3)的指标取最小值.

方程(1)和(3)构成糙率参数分析反问题的基本方程.从控制论的观点来看,可由方程(1)所描述的系统,求解最优控制 n ,使得系统的性能指标方程(3)取得最小值.

由于方程(1)所描述的系统是非线性系统,解析求解方程(1)和(3)构成的反问题有一定的困难,因此目前广泛采用离散优化的方法求解这一类工程水力学反问题.求解过程可分解为 2 部分:一是已知 $n(x)$ 时方程(1)的求解;二是求解使方程(3)取极小值的最优参数 $n(x)$.对于方程(1),可采用四点线性隐格式离散数

值求解^[1].

求解最优性能指标有多种方法^[2,3],由于方程(3)所表达的性能指标不显含变量 $n(x)$,对其求最优可采用单纯形法. 由于 $n(x)$ 是位置的函数,因此可把河道分成 l 段,那么每一段取一个代表值 $n_k(k=1,2,\cdots,l)$,构成一组参数 $N=\{n_k(k=1,2,\cdots,l)\}$,从而 $n(x)$ 可用这一组参数 $N=\{n_k(k=1,2,\cdots,l)\}$ 来表示. 把这一组待求参数可看作为 l 维空间的一个点,采用单纯形法可数值求解这组参数. 单纯形法的基本思想是:先给出若干组参数,算出相应的目标函数值,然后根据目标函数值的大小关系找出目标函数下降的方向,在下降的方向找出一组参数,计算它的目标函数值,再比较目标函数值的大小,以寻找新的函数下降方向. 如此不断搜索,直到取得满足最优解的一组参数为止.

2 河道糙率反问题卡尔曼滤波解

2.1 卡尔曼滤波^[4]

一个动态系统的变化,在没有外部干扰时,系统的未来状态可以根据现时状态由已知的运动方程来确定. 然而,总会存在某种外部干扰. 因此,任何实际的物理系统的行为,都可以认为是由已知运动方程正确地预测出的确定的量和均值为零的随机分量 2 部分组成的. 这样的系统可看作为马尔柯夫序列,其系统方程和量测方程为

$$x_k = \Phi_{k,k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}w_{k-1} \quad y_k = H_kx_k + v_k \quad (k \geq 1) \tag{4}$$

其中动态噪声 $\{w_k\}$ 与量测噪声 $\{v_k\}$ 为互不相关的零均值白噪声序列,即对所有的 k,j ,有

$$\begin{cases} E\{w_k\} = 0 & \text{Cov}(w_k, w_j) = E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj} \\ E\{v_k\} = 0 & \text{Cov}(v_k, v_j) = E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}(w_k, v_j) = E[w_k v_j^T] = 0 \end{cases} \tag{5}$$

这里 δ_{kj} 是 Kronecker δ 函数. 设初始状态的统计特性为

$$\begin{cases} E(x_0) = \mu_0 & \text{Var}x_0 = E\{(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T\} = P_0 \\ \text{Cov}(x_0, w_k) = 0 & \text{Cov}(x_0, v_k) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

考虑在时刻 k 得到了 $k-1$ 次量测值 $y(1), y(2), y(3), \cdots, y(k-1)$, 假设已经有了 $x(k-1)$ 的一个最优线性滤波值 $\hat{x}_{k-1} = x_{k-1,k-1}$, 即 $x_{k-1,k-1}$ 是 $y(1), y(2), y(3), \cdots, y(k-1)$ 的线性函数. 定义 $\hat{x}_{k,k-1}$ 为 $k-1$ 次量测所得的估计值 $\hat{x}_{k-1}$ 的一步预测值,其合理的数值为

$$\hat{x}_{k,k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \tag{7}$$

考虑到 $E(v_k) = 0$, 量测值的期望值可认为是 $\hat{y}_{k,k-1} = H_k \hat{x}_{k,k-1}$. 在时刻 k 取得量测数据 y_k 后,它与量测的预测估计值 $\hat{y}_{k,k-1}$ 之间有一定的偏差 $y_k - H_k \hat{x}_{k,k-1}$. 造成这一偏差的原因是预测估计 $\hat{x}_{k,k-1}$ 与量测值 y_k 都可能存在偏差. 为了得到时刻 k 上 x_k 的滤波值,利用预测偏差 $y_k - H_k \hat{x}_{k,k-1}$ 来修正预测值 $\hat{x}_{k,k-1}$. 于是,有递推形式

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k,k} = \hat{x}_{k,k-1} + K_k(y_k - H_k \hat{x}_{k,k-1}) \tag{8}$$

这里的 K_k 是一个待定的校正增益矩阵.

$$K_k = P_{k,k-1} H_k^T (H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \tag{9}$$

此时的误差方差阵为

$$P_{k,k} = P_{k,k-1} - K_k H_k P_{k,k-1} = [I - K_k H_k] P_{k,k-1} \tag{10}$$

这就是误差方差阵的递推迭代式. 由此可见,由卡尔曼滤波器的递推公式,一方面可得到滤波估计值,另一方面又可得到误差方差阵,也就是说,同时可进行误差分析. 这是卡尔曼滤波器的一个明显的优点.

2.2 河道糙率反问题解

由于河道糙率是经验公式的参数,采用曼宁公式,有

$$u = \frac{1}{n} r^{2/3} J^{1/2} \quad n = \frac{r^{2/3} J^{1/2}}{u} \tag{11}$$

式中: n ——河道糙率; u ——断面平均流速; r ——水力半径; J ——摩阻比降. 当有实测水文资料时,利用以上公式可直接求得河道糙率. 然而,事实并非如此,由于实测的水文资料不同程度地包含着随机误差,使得直接计算河道糙率也会包含随机误差. 对于这种包含着随机误差的参数估计,可用卡尔曼滤波进行求解.

某一河道,设有 $m+1$ 个水位观测站,把河道划分为 m 个河段,每一河段采用一个代表糙率,以糙率 n

为状态变量,将其视作平稳随机过程,则状态方程为

$$\boldsymbol{n}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{n}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{w}_{k-1} \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\Gamma}$ —— m 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_{m \times m}, \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I}_{m \times m}$ 对于量测方程,若以水位为变量,则该方程为复杂的非线性方程. 为了能应用卡尔曼滤波的结果,选取量测变量 $y = \sqrt{J}$, 则量测方程为

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{n}_k + \boldsymbol{v}_k \tag{13}$$
$$\boldsymbol{H}_K = \begin{bmatrix} h_{11} & & & & \\ & h_{22} & & 0 & \\ & & h_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & h_{mm} \end{bmatrix} \quad h_{ij} = \begin{cases} \frac{u}{r^{2/3}} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

式中 u, r 为第 i 河段对应的计算值. 由运动方程及观测水位 z , 计算可得

$$y = \sqrt{J} = \sqrt{-\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}} \tag{14}$$

考虑到河道一般情况,取糙率初始值 $n_0 = 0.025, P_0 = 0.025$, 噪声统计特性 $Q_k = 0.025, R_k = 0.0001$. 应用卡尔曼滤波公式可得河道计算糙率的迭代过程 糙率预报, $\hat{n}_{k,k-1} = \hat{n}_{k-1}$ 方差预测, $P_{k,k-1} = P_{k-1,k-1} + Q_{k-1}$; 滤波增益, $K_k = P_{k,k-1} H_k^T [H_k P_{k,k-1} H_k^T + R_k]^{-1}$ 糙率校正, $\hat{n}_k = \hat{n}_{k,k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{n}_{k,k-1})$ 方差迭代, $P_{k,k} = [I - K_k H_k] P_{k,k-1}$.

计算过程中,用数值方法模拟河道水流,用卡尔曼滤波方法预报和校正糙率,以此形成河道水流和糙率的联解方法.

3 应 用

淮河是我国中部的重要河流,地处南北气候、高低纬度和海陆相 3 种过渡带的重叠地区. 该地区是地球上典型的孕育灾害的环境地带,洪涝旱灾害历来很严重. 淮河流域常出现流域性或局部性的暴雨洪水,且常常是干支流洪水遭遇,平原洪涝并发,灾害频繁. 加之黄河夺淮 800 年,使淮河水系遭到巨大的破坏,下游入海水道变为地上河,尾闾不畅,许多支流发生了变迁或淤废,加剧了淮河的洪涝灾害. 淮河流域的水灾主要发生在平原地区,洪灾的损失主要表现在因洪致涝方面,即河道水位居高不下、两岸暴雨径流无法排出而造成的涝灾上. 因此,研究河道的排洪能力,搞好防洪规划,充分发挥防洪工程的作用,减少洪涝灾害损失,具有重要的意义.

蚌埠至洪泽湖的干流是淮河的主要河段,位于淮河流域中下游的平原地区. 该河段对淮河的行洪有重要的控制作用,在这 143 km 的河段上有蚌埠、吴家渡、沫河口、临淮关、五河、浮山、小柳巷、花园咀等水位站. 1982 年汛期有同步的观测水位资料. 本文利用这些实测水位资料,应用本文模型,对河道糙率参数进行了反分析. 计算以蚌埠的入流为上边界,以花园咀水位为下边界,如图 1 所示. 同时以吴家渡、沫河口、临淮关、五河、小柳巷的实测水位作为卡尔曼滤波计算校正的依据. 计算结果如图 2 所示. 从图中蚌埠、吴家渡、沫河口、临淮关、五河、小柳巷的水位过程可以看出,各站计算水位与实测水位过程完全吻合,说明本文方法具有很好的模拟效果.

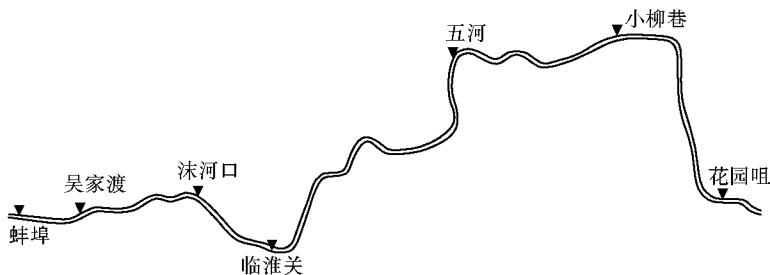


图 1 河道测站分布

Fig.1 Distribution of observation stations along the river channel

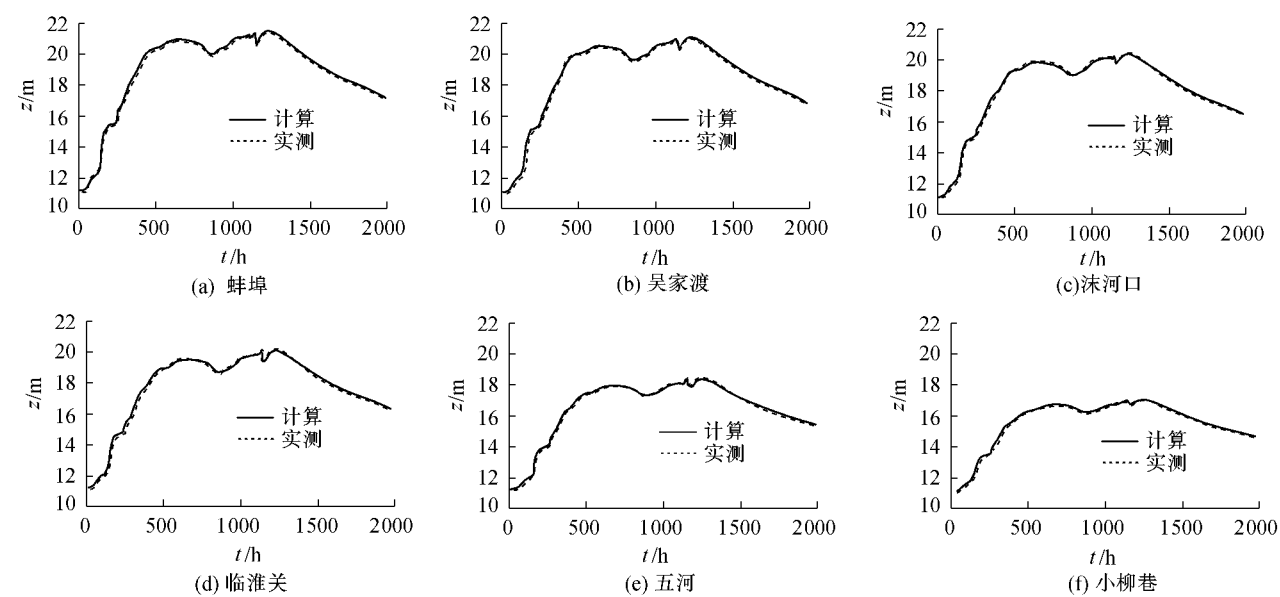


图 2 计算水位与实测水位的比较

Fig.2 Comparison of calculated water level with measured data

应用卡尔曼滤波方法预报和校正的糙率,得到的是一个随时间变化的糙率,图 3 给出了河段平均糙率变化过程.显然,动态糙率与传统糙率的概念有明显的区别,即动态糙率包含模型误差、截断误差、观测误差等各方面的综合影响.由于计算过程应用了实时观测水位,因此这种方法特别适用于缺少历史资料而新建的实时预报调度系统.对于没有实时水位观测的系统来说,这种方法是难以实施的.

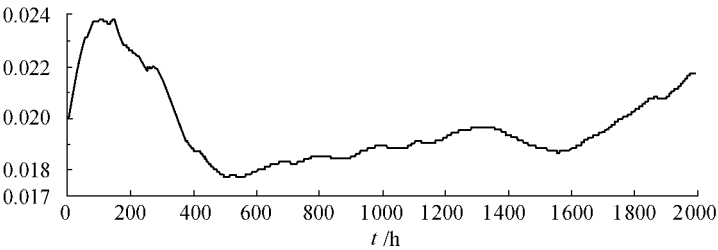


图 3 计算糙率变化过程

Fig.3 Variation of calculated roughness

参考文献：

[1] 李光炽,王船海.大型河网水流模拟的矩阵标识法[J].河海大学学报,1995,23(1):36—43.
[2] 金忠青,周志芳.工程水力学反问题[M].南京:河海大学出版社,1997.19—54.
[3] 叶庆凯,王肇明.优化与最优控制中的计算方法[M].北京:科学出版社,1986.56—83.
[4] 宋文尧,张牙.卡尔曼滤波[M].北京:科学出版社,1991.48—76.

Inverse analysis of river channel roughness parameter by use of Kalman filter

LI Guang-chi¹, ZHOU Jing-yan², ZHANG Gui-shou³

- (1. College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
2. College of Traffic and Ocean Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
3. Dept. of Civil Engineering, Shaoxing Univ., Shaoxing 312000, China)

Abstract By adoption of the four-point linear implicit form to solve water flow equations, a new method is developed for inverse analysis of water flow in river channels and the roughness parameters of the channels based on the Kalman filter, and applied to flow calculation for the Huaihe River. The variation of the water level calculated by the present method is in agreement with the measured data.

Key words river channel ; flow simulation ; inverse analysis of parameter ; Kalman filter