

非正交同位网格中的 SIMPLE 算法

王志东,汪德,赖锡军

(河海大学环境科学与工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 利用有限体积法建立了非正交同位网格系统中的压力校对方程,详细给出了压力校对方程的离散形式,并对正方腔及倾斜角为 45° 的斜方腔内流场进行了数值模拟计算.结果表明,非正交同位网格系统中的 SIMPLE 算法具有编程简单,计算量、存储量小,计算效率高,收敛速度快的优点,可用于几何形状比较复杂流场的计算.

关键词 有限体积法;非正交网格;SIMPLE 算法

中图分类号 TV131.4

文献标识码 A

文章编号 1000-1980(2003)05-0509-04

SIMPLE 算法是目前不可压缩流动问题数值求解中使用最为成熟的一种方法.该方法能够扩展到包含质量、热输运及湍流的流动问题,并适应于不同的网格系统,因而在众多的 CFD 软件中得到广泛应用.

SIMPLE 算法一般在正交网格系统中使用,若流场区域的几何边界是不规则的,则需要将实际的不规则区域转换为计算平面上的矩形区域,然后在矩形区域上进行数值求解.该方法的缺点是需要将 Cartesian 坐标系中的水流控制方程转换到一般的正交曲线坐标系中,使原本复杂的控制方程变得更加复杂^[1],且变换后方程中各项的物理含义也模糊不清.因此,如果能够在流场物理区域的任意非正交网格系统中建立 SIMPLE 求解算法,则可以大大简化计算工作,提高计算精度.同时,非正交网格(结构或非结构)又可以最大限度地拟合流场复杂的物理边界^[2].本文给出了非正交网格系统中的压力校对方程,并进行了典型流场的数值模拟计算.

1 非正交同位网格系统中的压力校对方程及其离散

1.1 控制方程及其离散

采用有限体积法(FVM)对控制方程进行离散,有限体积法是从积分形式的 N-S 方程及连续方程出发的,定常不可压缩粘性流体的运动控制方程为

$$\int_S \rho u_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \rho \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{n} dS \quad \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

式中: $\mathbf{i}_i$ ($i = 1, 2$)——坐标轴上的单位矢量; $\mathbf{v}$ ——速度矢量, $\mathbf{v} = (u_1, u_2)$; ρ, μ ——流体密度及动力粘度; S ——控制体的控制面积; $\mathbf{n}$ ——控制面的法线方向.

动量方程对应的离散方程形式为

$$A_P \phi_P + \sum_L A_L \phi_L = Q_\phi$$

$$\phi_P = u_i \quad (i = 1, 2) \quad A_L = \min(\dot{m}_l, 0) - \frac{\mu_l S_l}{L_{PL}} \quad A_P = - \sum_L A_L$$

式中: l ——计算节点 P 对应的控制面, $l = e, w, n, s$; L ——与节点 P 相邻的计算节点, $L = E, W, N, S$;
 $\dot{m}_l$ ——通过控制面 l 的质量通量; S_l ——控制面 l 的面积; L_{PL} ——节点 P 与节点 L 间的距离.

应注意,在各控制面上的对流及扩散通量,计算时需要采用通量修正技术.其目的是避免出现波动解,同时改善求解算法的收敛性^[3,4].

1.2 非正交网格中的 SIMPLE 方法

为推导压力校对方程,将动量方程中的压力项从方程右端的源项中分离出来,并以 u 方程为例予以说明.

$$A_p^u u_p + \sum_L A_L^u u_L = (Q_u - Q_u^p) + Q_u^p$$

若动量方程的第 m 次迭代值为 u_p^{m*} , 则

$$A_p^u u_p^{m*} + \sum_L A_L^u u_L^{m*} = (Q_u - Q_u^p) + Q_u^p$$

$$u_p^{m*} = \frac{(Q_u - Q_u^p) - \sum_L A_L^u u_L^{m*}}{A_p^u} + \frac{1}{A_p^u} Q_u^p$$

记右端第 1 项为 H_p^{m*} , 同时 $Q_u^p = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_p \Delta\Omega$, 则

$$u_p^{m*} = H_p^{m*} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_p \frac{\Delta\Omega}{A_p^u} \quad (1)$$

速度 u_p^{m*} 满足动量方程但不满足连续方程, 因此需对该速度进行修正. SIMPLE 算法中是通过修正压力场来实现速度修正的.

$$u_p^m = H_p^{m*} - \frac{\Delta\Omega}{A_p^u} \left(\frac{\partial p^m}{\partial x} \right)_p \quad (2)$$

式中: u_p^m ——满足连续方程的速度, $u_p^m = u_p^{m*} + u'$; p^m ——相应的压力场, $p^m = p + p'$.

(2)-(1) 可得校正压力 p' 与校正速度 u' 之间的关系

$$u_p' = H_p' - \frac{\Delta\Omega}{A_p^u} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_p$$

为应用连续方程, 需要知道控制面上的修正速度和修正压强. 修正速度和修正压强可通过动量插值方法来确定. 由于在修正速度的插值计算中包含了修正压强梯度的插值, 故插值之后控制面 e 上的修正速度与修正压强梯度依然保持上述关系, 即

$$u_e' = H_e' - \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p^u} \right)_e \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_e$$

式中 $H_e' = - \frac{\sum_l A_l u_l'}{A_p^u}$, 但在求解压力校对方程之前 u_l' 未知, 故在 SIMPLE 算法中该项被忽略, 即

$$u_e' = - \frac{\Delta\Omega}{A_p^u} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_e$$

同理

$$v_e' = - \frac{\Delta\Omega}{A_p^v} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_e$$

将式(2)代入离散型连续方程, 有

$$\dot{m}_e' + \dot{m}_w' + \dot{m}_n' + \dot{m}_s' + \Delta\dot{m}_p^* = 0$$

即

$$(\rho S u')_e - (\rho S u')_w + (\rho S u')_n - (\rho S u')_s + \Delta\dot{m}_p^* = 0 \quad (3)$$

在非正交网格中, 修正质量通量计算公式为

$$\dot{m}_e' = (\rho S u')_e = - (\rho \Delta\Omega S)_e \left(\frac{1}{A_p^u} \right)_e \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right)_e = - \left(\frac{\rho \Delta\Omega S}{r_E - r_p} \right)_e \left(\frac{1}{A_p^u} \right)_e [p_E - p_p - (\text{grad} p)_e (r_E - r_p)]$$

上式 * 中的第 2 项通常是忽略不计的, 一是因为其增加了计算工作量, 二是因为该项当网格非正交性较弱时, 影响不大. 但若网格是强非正交的, 则必须计入该项的影响.

将另外 3 个控制面上的质量通量代入式(3), 则可得非正交网格中的压力校对方程为

$$A_p^p p_p' + \sum_l A_l^p p_l' = - \Delta\dot{m}_p^*$$

$$A_E^p = - \left(\frac{\rho \Delta\Omega S}{A_p^u} \right)_e \frac{1}{(r_E - r_p) \mathbf{n}}$$

$$\begin{aligned} A_W^p &= - \left(\frac{\rho \Delta \Omega S}{A_p^u} \right)_w \frac{1}{(\mathbf{r}_W - \mathbf{r}_p) \mathbf{n}} \\ A_N^p &= - \left(\frac{\rho \Delta \Omega S}{A_p^u} \right)_n \frac{1}{(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_p) \mathbf{n}} \\ A_S^p &= - \left(\frac{\rho \Delta \Omega S}{A_p^u} \right)_s \frac{1}{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_p) \mathbf{n}} \\ A_p^p &= - \sum_L A_L^p \end{aligned}$$

$-\Delta m_p^*$ ——前一次迭代速度场对应的控制体质量通量, $-\Delta m_p^* = -(\dot{m}_e^* + \dot{m}_w^* + \dot{m}_n^* + \dot{m}_s^*)^{n-1}$.
至此,非正交同位网格系统中 SIMPLE 算法中的压力校对方程及其离散形式已经给出.那么利用 SIMPLE 算法的计算步骤即可进行流的数值计算.

2 计算算例

顶板移动的方腔流场计算常被用来检验数值算法的稳定性和精度.为便于比较,首先计算了正交网格下方腔的内流场,其中网格数为 80×80 ,迭代过程中速度及压强的欠松弛矢量为 0.8 0.8 0.3,给出了速度分布曲线,并与文献[5]的结果进行了比较,见图 1.为了检验非正交网格系统下的 SIMPLE 算法,对方腔壁倾斜角为 45° 时的倾斜方腔内的流场进行了数值模拟,网格数仍为 80×80 ,但迭代过程中速度及压强的欠松弛矢量为 0.7 0.7 0.2.本文仅给出了 $Re = 100$ 时的斜方腔中纵剖面及中横剖面上的速度分布曲线,见图 2.

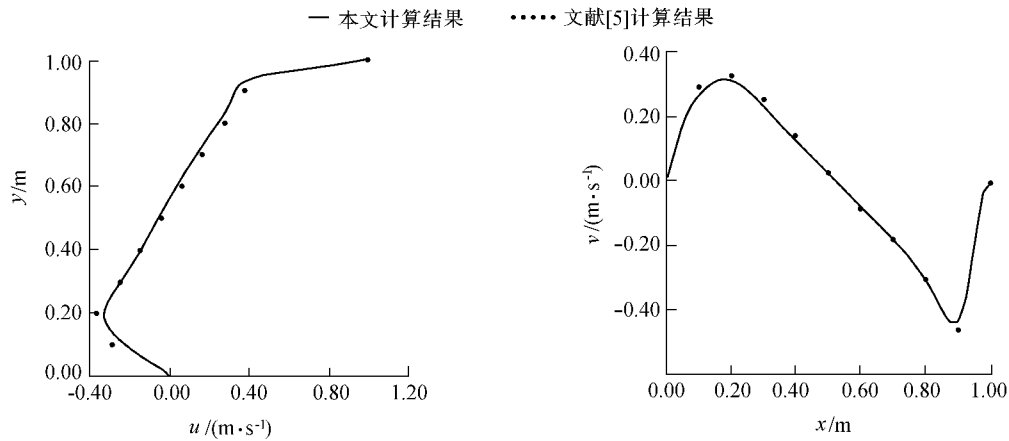


图 1 $\beta = 90, Re = 1000$ 时方腔中纵断面及中横断面上的速度分布曲线
Fig.1 Profiles of U-velocity component and V-velocity component for $\beta = 90$ and $Re = 1000$

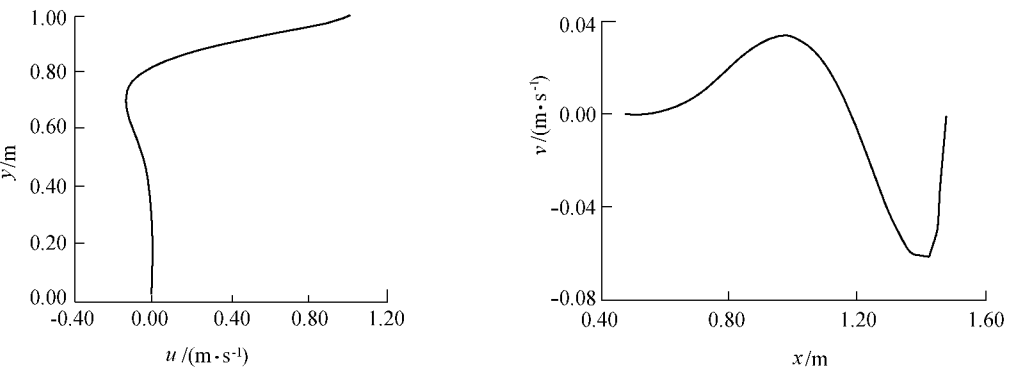


图 2 $\beta = 45, Re = 100$ 时方腔中纵断面及中横断面上的速度分布曲线
Fig.2 Profiles of U-velocity component and V-velocity component for $\beta = 45$ and $Re = 100$

3 结 论

非正交同位网格系统中的 SIMPLE 算法避免了采用交错网格系统编程时特定的变量定位信息及复杂的

插值计算,且不需要对水流控制方程进行曲线坐标变换,从而使编程变得更加简单、有效;非正交网格容易生成,能够适应几何形状复杂的物理边界;相对于非结构网格而言,非正交网格具有收敛速度快、计算效率高的特点。

参考文献:

- [1] 魏文礼.泄水建筑物反弧紊流数值计算及抗蚀体型研究[D].南京:河海大学,1996.
- [2] FERZIGER J H, PERIC M. Computational methods for fluid dynamics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 188—194.
- [3] PERIC M. Analysis of pressure-velocity coupling on nonorthogonal grid[J]. Numerical Heat Transfer, Part B, 1990, 17: 63—82.
- [4] 吴子牛.计算流体力学基本原理[M].北京:科学出版社, 2001. 153—159.
- [5] LILEK Z, MUZAFERIJA S. An implicit finite-volume method using nonmatching block of structured grid[J]. Numerical Heat Transfer, Part B, 1997, 32: 385—401.

Nonorthogonal collocated grid-based SIMPLE algorithm

WANG Zhi-dong, WANG De-guan, LAI Xi-jun

(College of Environmental Science and Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract A pressure correction equation is established by use of the finite volume method on nonorthogonal collocated grids, and its algebraic form is also given. The equation is applied to simulation of the flow field in an equilateral cavity and an inclined cavity with a tilt angle of 45° . The results show that the SIMPLE algorithm, with the merits of simple programming, small amount of calculation, low storage capacity to be demanded, high efficiency of calculation, and fast convergence, can be used for calculation of flow fields with complex boundaries.

Key words FVM; nonorthogonal grid; SIMPLE algorithm

《水利经济》征订启事

《水利经济》是中国水利经济研究会会刊,由中国水利经济研究会与河海大学共同主办,是理论与实践相结合、普及与提高相结合的综合性科技刊物。《水利经济》1983年创刊,是水利系统优秀期刊,是全国唯一的水利经济研究方面的专业性期刊。经国家科委批准,国内外公开发行。

《水利经济》由邮局发行。邮发代号 28—252,全国各地邮局均可订阅。如未能及时订阅,可向编辑部函索订单,也可直接汇款至编辑部订阅。本刊为双月刊,6.00元/期,全年42.00元(其中含邮寄费6.00元)。

订阅方法:

(1) 邮局汇款:请将订单第2联、第3联仔细填好后与汇款单一起寄回本刊编辑部(请注明订阅《水利经济》杂志)。

(2) 银行汇款:南京工商银行宁海路分理处,河海大学 430101140900102451X(请注明订阅2003年《水利经济》杂志)。

编辑部地址:210098 南京西康路1号 河海大学 联系电话:(025) 8786350 联系人:王海

传真:(025) 8787381 E-mail:jj@hhu.edu.cn