

裂隙尖端能量释放和整体变形能量的等效性

杨松林,徐卫亚,朱珍德

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要:以单轴应力和静水应力状态为例,分析了单裂隙变形过程中裂隙尖端局部能量释放和裂隙整体变形能量的等效性;并以此等效性为基础,从计算裂隙尖端局部能量释放和计算裂隙整体变形能量两种途径出发,对裂隙固体的有效弹性模量和有效体积模量进行估计,得到了相同的表达式,从而说明了两种能量的等效性是众多裂隙岩体类型有效弹性模量分析的基本前提。

关键词:币状裂隙;有效弹性模量;能量等效性

中图分类号: TU45 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-198X(2003)05-0552-04

断裂力学的发展为岩石力学特性研究提供了一种全新的思维方法和分析手段,并已逐渐在岩石工程领域中得到应用。其中一个很重要的应用就是对裂隙岩体的有效弹性模量进行估计,并建立相应的应力应变本构模型。20 世纪 70 年代以来国外学者在这方面做了大量的研究工作。如 Budiansky 等^[1]应用自洽理论对包含随机分布裂隙的固体弹性模量进行了分析;Horri 等^[2]分析了应力诱发各向异性裂隙固体的等效弹性模量;Kemeny 等^[3]估计了二维和三维裂隙体的弹性模量;Hu 等^[4]对各向异性裂隙岩体的弹性力学参数进行了较为全面的分析。虽然各人的推导方法和过程不同,但有着共同的推导前提,即裂隙尖端局部能量释放和裂隙整体变形能量的等效性。本文基于这种等效性,从两种不同途径出发对包含随机分布裂隙的固体弹性模量进行了估计,得到了完全相同的结果,从而验证了裂隙能量等效的正确性。

1 裂隙能量等效性的证明

无限大岩体在边界处受到外力作用并且此外力保持不变,在岩体中引入币状单裂隙,裂隙半径为 a 。假设裂隙通过自相似扩展达到目前的尺寸,裂隙尖端所释放的能量全部用来形成裂隙自由表面,则此扩展过程中裂隙尖端所释放的总能量为

$$U_I = \frac{1-\mu^2}{3E} \oint \left[K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\mu} \right] a dc \quad (1)$$

式中: E, μ ——岩质材料的弹性模量和泊松比; K_I, K_{II}, K_{III} ——币状裂隙的 3 种应力强度因子。

若裂隙上作用着垂直于裂隙面的正应力 σ 和平行于裂隙面的剪应力 τ ,则币状裂隙的 3 种类型应力强度因子为

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a} \quad K_{II} = \frac{4}{\pi(2-\mu)} \tau \cos \beta \sqrt{\pi a} \quad K_{III} = \frac{4(1-\mu)}{\pi(2-\mu)} \tau \sin \beta \sqrt{\pi a} \quad (2)$$

式中 β 为币状裂隙半径矢量与裂隙面上剪应力矢量的夹角。

将式(2)代入式(1)得

$$U_I = \frac{8}{3} \frac{1-\mu^2}{E} \sigma^2 a^3 + \frac{16}{3} \frac{1-\mu^2}{E(2-\mu)} \tau^2 a^3 \quad (3)$$

而应力作用于单裂隙使其发生张开位移,应力因此而作功所产生的附加应变能为

$$U_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \int \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) ds \quad (4)$$

收稿日期 2002-09-29

基金项目 国家自然科学基金资助项目(50128908),国家重点基础研究发展规划项目(973 计划 2002CB412707),法国国家科研中心(CNRS)资助项目

作者简介 杨松林(1973—),男,湖北当阳人,博士,主要从事岩土力学方面的研究。

式中: σ_{ij} ——局部坐标系下作用于含裂隙固体的应力分量; u_i ——裂隙因此而产生的张开位移分量; n_i ——裂隙单位法向矢量的分量; s ——币状裂隙面积.

局部坐标系的 z 轴平行于裂隙法向. 在局部坐标系下, 裂隙单位法向矢量为 $N=(n_1, n_2, n_3)=(0, 0, 1)$, 裂隙的张开位移为

$$u_1 = \frac{1(1-\mu^2)}{\pi E(2-\mu)}\sqrt{a^2-r^2}\sigma_{13} \quad u_2 = \frac{1(1-\mu^2)}{\pi E(2-\mu)}\sqrt{a^2-r^2}\sigma_{23} \quad u_3 = \frac{8(1-\mu^2)}{\pi E}\sqrt{a^2-r^2}\sigma_{33} \quad (5)$$

并存在如下关系:

$$\sigma = \sigma_{33} \quad \tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \quad (6)$$

将式(5)代入式(4)后对面积进行积分, 利用式(6), 最后得到与式(3)完全相同的结果. 由此可以证明

$$\frac{1-\mu^2}{3E} \oint \left[K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\mu} \right] a dc = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \int \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) ds \quad (7)$$

这便是裂隙尖端局部能量释放和裂隙岩体变形整体能量的等效性.

2 等效弹性模量的两种推导过程

现分别考虑裂隙尖端局部能量释放和裂隙岩体整体变形能量, 对含裂隙岩体的等效弹性模量进行分析, 并在推导过程中作如下假设: 在岩体中币状裂隙的方位和出现位置完全随机, 裂隙具有相同的半径, 并且不考虑裂隙的闭合效应.

2.1 基于局部能量释放的计算

在单轴应力 σ 作用下, 据 Betti 能量互等定理, 有

$$\frac{\sigma^2 V}{2\bar{E}} = \frac{\sigma^2 V}{2E} + U \quad (8)$$

式中: V ——岩体体积; $\bar{E}$ ——含裂隙岩体的有效杨氏模量; E ——岩质材料的杨氏模量; U ——裂隙引起的附加应变能.

在单轴应力作用下, 币状裂隙应力强度因子为

$$\begin{cases} K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sin^2 \gamma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} = \frac{4}{\pi(2-\mu)} \sigma \sin \gamma \cos \gamma \cos \omega \sqrt{\pi a} \\ K_{III} = \frac{4(1-\mu)}{\pi(2-\mu)} \sigma \sin \gamma \cos \gamma \sin \omega \sqrt{\pi a} \end{cases} \quad (9)$$

式中 γ, ω 为币状裂隙在整体坐标系下的角度参数.

由于裂隙方位完全随机, 对角度参数进行球面平均, 则有

$$\sin^2 \omega = \cos^2 \omega = \frac{1}{2} \quad \sin^4 \gamma = \frac{1}{5} \quad \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma = \frac{2}{15} \quad (10)$$

将式(9)代入式(1)并利用式(10)得到自相似扩展时裂隙尖端释放的总能量

$$U = \sigma^2 \frac{8}{45} \frac{(1-\mu^2)(10-3\mu)}{E(2-\mu)} na^3 \quad (11)$$

式中 n 为岩体体积 V 内所包含的裂隙数目.

将式(11)代入式(8)得到不考虑裂隙相互作用时裂隙岩体与岩质材料杨氏模量的比值

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{16}{45} \chi (1-\mu^2) \frac{10-3\mu}{2-\mu}} \quad (12)$$

式中 χ 为裂隙密度参数, $\chi = \frac{na^3}{V}$.

在静水应力 σ_H 状态下, 根据 Betti 能量互等定理, 有

$$\frac{\sigma_H^2 V}{\bar{K}} = \frac{\sigma_H^2 V}{K} + U \quad (13)$$

币状裂隙在静水状态下的应力强度因子为

$$K_I = 2\sigma_H \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad K_{II} = K_{III} = 0 \quad (14)$$

将式(14)代入式(1),得到受静水应力作用时因裂纹引起的附加应变能

$$U = \frac{8}{3} \frac{1-\mu^2}{E} \sigma^2 n a^3 \quad (15)$$

由式(13)得到不考虑裂隙相互作用时裂隙岩体与岩质材料的体积模量的比值

$$\frac{\bar{K}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9} \chi \frac{1-\mu^2}{1-2\mu}} \quad (16)$$

考虑裂隙之间的相互作用时,根据自洽理论^[3],只需在式(12)和式(16)中以 $\bar{E}$ 、 $\bar{\mu}$ 分别代替 E 、 μ ,就可得到相应的裂隙岩体与岩质材料模量的比值

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{16(1-\bar{\mu}^2)(10-3\bar{\mu})}{45(2-\bar{\mu})} \chi \quad \frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{16}{9} \frac{1-\bar{\mu}^2}{1-2\bar{\mu}} \chi \quad (17)$$

根据文献[3], $\bar{\mu}$ 可由以下隐含式求出:

$$\chi = \frac{45}{16} \frac{(\mu - \bar{\mu})(2 - \bar{\mu})}{(1 - \bar{\mu}^2)(10\mu - \bar{\mu}(1 + 3\mu))}$$

2.2 基于裂隙整体变形能量的分析过程

在裂隙局部坐标系下,根据式(4),在体积 V 内因单个裂隙而引起的附加应变能密度 ρ 为

$$\rho = \frac{1}{2V} \sigma_{ij} \int \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) ds = K_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} \quad (18)$$

式中 K_{ijkl} 为局部坐标系下体积 V 内因单裂隙而引起的附加柔度张量.根据式(18),其计算结果如下:

$$K_{3333} = \frac{16(1-\mu^2)a^3}{3E} \quad K_{1313} = K_{2323} = \frac{8(1-\mu^2)a^3}{3E(2-\mu)} \quad K_{ijkl} = K_{jikl} = K_{klij} = K_{ilkj}$$

其他分量为零.

在裂隙方位和位置均为随机分布的前提下,考虑体积 V 内所有裂隙对柔度的贡献,利用张量的坐标转换关系并对相关角度进行球平均,便得到因裂隙引起的附加总体柔度

$$H_{ijkl} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T_{ia} T_{jb} T_{kc} T_{ld} K_{abcd} \cos\varphi d\varphi d\theta \quad (19)$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

式中: T_{ij} ——裂隙局部坐标系和固体整体坐标系之间的转换矩阵; φ 、 θ ——角参数,表示裂隙的取向.将币状裂隙局部坐标系下 K_{ijkl} 的相关分量代入式(19),角度积分后得

$$\begin{cases} H_{1111} = H_{2222} = H_{3333} = \frac{16(1-\mu^2)(10-3\mu)}{45(2-\mu)E} \chi & H_{1122} = H_{2233} = H_{3311} = -\frac{16\mu(1-\mu^2)}{45(2-\mu)E} \chi \\ H_{1212} = H_{2323} = H_{3131} = \frac{16(1-\mu^2)(5-\mu)}{45(2-\mu)E} \chi & H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{ilkj} = H_{klij} \end{cases} \quad (20)$$

其他分量为零.

裂隙岩体的总体弹性柔度张量为

$$\bar{D}_{ijkl} = D_{ijkl} + H_{ijkl} = \frac{1}{E} \left[\frac{1+\bar{\mu}}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \bar{\mu}\delta_{ij}\delta_{kl} \right] \quad (21)$$

$$D_{ijkl} = \frac{1}{E} \left[\frac{1+\mu}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \mu\delta_{ij}\delta_{kl} \right] \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

式中: D_{ijkl} ——岩质材料的弹性柔度张量; $\bar{E}$ 、 $\bar{\mu}$ ——裂隙岩体的有效弹性参数.

由式(21)分析得到不考虑裂隙相互作用时裂隙岩体与岩质材料模量的比值

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1 + \frac{16}{45}\chi(1 - \mu^2)\frac{10 - 3\mu}{2 - \mu}} \qquad \frac{\bar{K}}{K} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}\chi\frac{1 - \mu^2}{1 - 2\mu}}$$

(22)

此结果与式(12)(16)完全相同.

根据自洽理论,在式(22)中以 $\bar{E}$ 、 $\bar{\mu}$ 分别代替 E 、 μ ,便可得到考虑裂隙相互作用时岩体的等效弹性模量.其结果也与式(17)完全相同.

3 结 语

本文以单轴应力和静水应力为例对等效性进行了分析,其分析方法也同样适用于其他应力状态.从分析过程及其结果可以看出,在裂隙的方位和位置完全随机分布的情况下对含裂隙岩体的等效弹性模量进行估计时,虽然是两种完全不同的分析过程,却得到了相同的结果.出现这种现象的根本原因在于裂隙尖端局部能量释放和裂隙岩体整体变形能量的等效性.裂隙的这种能量等效性不仅能用来估计各向同性裂隙岩体的有效弹性模量,同时也是分析各向异性裂隙岩体有效弹性模量时的一个前提.这一点已在有关文献^[1~3]中得到证明.

参考文献 :

[1] BUDIANSKY B ,O 'CONNELL R. Elastic moduli of a cracked solid[J]. Int J Solids Structures ,1976 ,12 :81—97.
[2] HORRI H ,NEMAT-NASSER S. Overall moduli of solids with microcracks :load-induced anisotropy[J]. J Mech Phys Solids ,1983 ,31 :155—171.
[3] KEMENY J ,COOK N G W. Effective moduli ,non-linear deformation and strength of a cracked solid[J]. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr ,1986 ,23(2) :107—118.
[4] HU K X ,HUANG Y. Estimation of the elastic properties of fractured rock masses[J]. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr ,1993 ,30(4) :107—118.

Equivalence between energy release from crack tips and overall deformation energy of cracks

YANG Song-lin , XU Wei-ya , ZHU Zhen-de

(College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract :With the uniaxial stress and triaxial stress states as examples , the equivalence between energy release from crack tips and overall deformation energy of cracked rock is analyzed. On the basis of the equivalence , the effective elastic modulus and elastic bulk modulus of cracked solids are estimated by calculation of the local energy release from crack tips and the overall deformation energy of cracked rock. The same results obtained show that the equivalence between the two kinds of energy is a basis for estimation of the effective elastic modulus of isotropic and anisotropic cracked solids.

Key words :penny-shaped crack ; effective elastic modulus ; energy equivalence