

线性离散大系统关联稳定性的一种判别方法

孙水玲,陈潮填

(广东民族学院计算机科学系,广东 广州 510665)

摘要 利用向量李雅普诺夫函数法,分别研究了具有自互联作用和不具有自互联作用的线性离散大系统关联稳定性,给出了一种根据辅助矩阵特征根位置判别稳定性的方法及其算法,并用例子说明了其有效性.

关键词 大系统 线性离散系统 关联稳定性 向量李雅普诺夫函数

中图分类号 :N941 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2003)05-0589-04

随着计算机应用的普及和计算科学的发展,离散系统的稳定性越来越成为人们普遍感兴趣的研究课题.但在许多实际问题的离散系统中,往往因维数很高而给系统稳定性的研究带来很大困难.为了解决这些问题,文[1]利用大系统的方法,把系统视为若干相互联结的低阶子系统相互作用的动态大系统,然后通过研究子系统及其关联性质给出大系统的稳定性.这方面的研究成果较多^[2~4].本文利用李雅普诺夫向量函数法,分别讨论了具有自互联作用和不具有自互联作用两种形式的线性离散大系统的关联稳定性,并给出了其算法步骤.同时还根据文[4]提出的大系统的部分关联稳定性问题,给出了线性离散大系统的部分关联稳定性的判别方法.

1 主要结果

考虑具有 r 个子系统的 n 阶线性定常离散大系统

$$X_i(k+1) = A_i X_i(k) + \sum_{j=1}^r e_{ij} A_{ij} X_j(k) \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \quad (1)$$

其线性孤立子系统为

$$X_i(k+1) = A_i X_i(k) \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \quad (2)$$

式中: A_i —— $n_i \times n_i$ 阶常数矩阵; A_{ij} —— $n_i \times n_j$ 阶常数矩阵; X_i —— n_i 维状态分量, $X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)})^T$. 其中: $i, j = 1, 2, \cdots, r$; $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$; $X = (X_1, X_2, \cdots, X_r)^T$ 为 n 维状态向量; 关联参数矩阵 A_{ij} 表示子系统间的相互作用, A_{ii} 表示子系统的自互作用.

记 $\bar{E} = (\bar{e}_{ij})_{r \times r}$ 为系统(1)的基本互联矩阵,对于矩阵 $E = (e_{ij})_{r \times r}$,若 $\bar{e}_{ij} = 0$ 蕴含 $e_{ij} = 0$,则记为 $E \in \bar{E}$ ^[5].

定义 若 $E_0 = (e_{ij}^0)_{r \times r} \in \bar{E}$,并且 E_0 中某些元素固定为 1 其余元素恒为 0,则称 E_0 为 $\bar{E}$ 的一个固定互联矩阵.若 $E = (e_{ij})_{r \times r} \in \bar{E}$,且 E_0 的元素 $e_{ij}^0 = 1$ 蕴含 $e_{ij} = 1$,则称 E 为 $\bar{E} - E_0$ 的部分互联矩阵,记为 $E \in \bar{E} - E_0$ ^[4].

以下假设对于离散大系统(2)的每个子系统,都存在 $n_i \times n_i$ 阶正定对称矩阵 B_i 和常数 μ_i 使正定二次型

$$V_i(X_i(k)) = X_i^T(k) B_i X_i(k) \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \quad (3)$$

满足

$$\Delta V_i(X_i(k))_{(2)} = \mu_i X_i^T(k) X_i(k) \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \quad (4)$$

定理 1 假定(a) (4)式中的 $\mu_i < 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$, (b) $r \times r$ 阶矩阵 $C = (c_{ij})$ 的所有特征根 λ_i 都有 $|\lambda_i| <$

$I(i=1,2,\cdots,r)$, 则大系统(1)的平衡态 $X(k)=0$ 是关于 $\bar{E}$ 联结一致渐近稳定的. 其中:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_i}{2M} & (i=j) \\ \frac{1}{\lambda_m(B_j)} p_{ij} & (i \neq j) \end{cases} \quad M = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ -\frac{\alpha_i}{2}, \lambda_M(B_i) \right\} \quad (5)$$

$$p_{ij} = \frac{(n-n_i)\alpha_{ij}^2}{2n_j\alpha_i} + \frac{3}{2}\bar{e}_{ij}\beta_{ij} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^r \frac{\bar{e}_{ij}(n-n_i-n_s)(\gamma_{is}^i)^2}{2n_j\beta_{is}} \quad (6)$$

$$\alpha_i = -[\mu_i + \bar{e}_{ii}\bar{\lambda}_M(A_i^T B_i A_{ii} + A_{ii}^T B_i A_i + A_{ii}^T B_i A_{ii})] \quad (i=1,2,\cdots,r) \quad (7)$$

$$\alpha_{ij} = 2\bar{e}_{ij}(\|A_i^T B_i A_{ij}\| + \bar{e}_{ii}\|A_{ii}^T B_i A_{ij}\|) \quad \beta_{ij} = \lambda_M(A_{ij}^T B_i A_{ij}) \quad (i,j=1,2,\cdots,r; i \neq j) \quad (8)$$

$$\gamma_{is}^i = \bar{e}_{is}\|A_{is}^T B_i A_{ij}\| \quad (i,j,s=1,2,\cdots,r; i \neq j \neq s) \quad (9)$$

式中: $\|\cdot\|$ —— 矩阵或向量的谱范数; $\lambda_m(P), \lambda_M(P)$ —— 对称矩阵 P 的最小和最大特征根.

$$\bar{\lambda}_M(P_i) = \max\{\lambda_M(P_i), 0\} \quad (i=1,2,\cdots,r) \quad (10)$$

证明 令 $Y_i = \|X_i(k)\|$ ($i=1,2,\cdots,r$), 并利用不等式

$$-\alpha x^2 + xy \leq -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{1}{2\alpha}y^2 \quad (11)$$

对 $\forall \alpha \in \mathbf{R}^+, (x,y) \in \mathbf{R}^2$ 及假设(b)蕴含的每个 $\alpha_i > 0$, 则对 $\forall E = (e_{ij})_{r \times r} \in \bar{E}$, 有

$$\Delta V_i(X_i(k))_{(1)} = X_i^T(k+1)_{(1)} B_i X_i(k+1)_{(1)} - X_i^T(k) B_i X_i(k) \leq$$

$$[\mu_i + \bar{e}_{ii}\bar{\lambda}_M(A_{ii}^T B_i A_i + A_{ii}^T B_i A_{ii} + A_{ii}^T B_i A_{ii})] Y_i^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \bar{e}_{ij}(\|A_i^T B_i A_{ij}\| + \bar{e}_{ii}\|A_{ii}^T B_i A_{ij}\|) Y_i Y_j +$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \bar{e}_{ij}[\lambda_M(A_{ij}^T B_i A_{ij}) Y_j^2 + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^r \bar{e}_{is}\|A_{ij}^T B_i A_{is}\| Y_j Y_s] =$$

$$-\alpha_i Y_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \alpha_{ij} Y_i Y_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \bar{e}_{ij}(\beta_{ij} Y_j^2 + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^r \gamma_{ij}^s Y_j Y_s) =$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left\{ \frac{n_j}{n_i - n} \alpha_i Y_i^2 + \alpha_{ij} Y_i Y_j \right\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \bar{e}_{ij} \left[\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^r \left(\frac{n_s}{n - n_i - n_j} \beta_{ij} Y_j^2 + \gamma_{ij}^s Y_j Y_s \right) \right] \leq$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left[\frac{n_j \alpha_i}{2(n_i - n)} Y_i^2 + \frac{(n - n_i) \alpha_{ij}^2}{2n_j \alpha_i} Y_j^2 \right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \bar{e}_{ij} \left\{ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i,j}}^r \left[\frac{3n_s \beta_{ij}}{2(n - n_i - n_j)} Y_j^2 + \frac{(n - n_i - n_j)(\gamma_{ij}^s)^2}{2n_s \beta_{ij}} Y_s^2 \right] \right\} =$$

$$-\frac{\alpha_i}{2} Y_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r p_{ij} Y_j^2 \leq \frac{\alpha_i}{2\lambda_M(B_i)} V_i(X_i(k)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{1}{\lambda_m(B_j)} p_{ij} V_j(X_j(k))$$

推得

$$V_i(X_i(k+1))_{(1)} \leq \sum_{j=1}^r c_{ij} V_j(X_j(k)) \quad (i=1,2,\cdots,r) \quad (12)$$

取 $V(X(k)) = [V_1(X_1(k)), V_2(X_2(k)), \cdots, V_r(X_r(k))]^T$ 为向量李雅普诺夫函数, 则对 $\forall E \in \bar{E}$ 都有

$$V(X(k+1))_{(1)} \leq CV(X(k)) \quad (13)$$

由比较原理知 $\lim_{k \rightarrow \infty} V(X(k)) = 0$, 从而推出 $\lim_{k \rightarrow \infty} X(k) = 0$, 即系统(1)的平衡态 $X(k) = 0$ 对 $\forall E \in \bar{E}$ 是一致联结渐近稳定的.

由此得判别算法如下: (a) 由式(3)计算系统(2)的各子系统的李雅普诺夫函数转步(b); (b) 由定理1给出的式(5)~(10)计算矩阵 C , 转(c); (c) 求矩阵 C 的所有特征根并进行判定, 即如果矩阵 C 的所有特征根都在单位圆内, 则系统(1)一致联结渐近稳定, 否则调整互联矩阵 A_{ij} ($i,j=1,2,\cdots,r$) 并回到(b).

有时也要考虑没有自互作用的情形. 现考虑如下形式的 n 阶线性定常离散大系统:

$$X_i(k+1) = A_i X_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r e_{ij} A_{ij} X_j(k) \quad (i=1,2,\cdots,r) \quad (14)$$

其孤立子系统仍为(2)的形式,则相应地有如下定理.

定理 2 若将定理 1 的假设(a)改为式(4)中的 $\mu_i = -1 (i = 1, 2, \cdots, r)$, (b) 不变, 则大系统(14)的平衡态 $X(k) = 0$ 是关于 $\bar{E}$ 全局联结渐近稳定的.

其中 c_{ij} 由式(5)定义, $\alpha_i = 1, \alpha_{ij} = \bar{e}_{ij} \|A_i^T B_i A_{ij}\|$. 证明类似定理 1, 从略.

另外, 在实际系统中, 有些子系统间的关联是固定不变的. 为此, 文[4]提出了部分联结稳定性问题. 下面给出大系统(1)的部分联结稳定性的判别定理.

定理 3 若将定理 1 的假设(a)改为 $\mu_i < 0 (i = 1, 2, \cdots, l)$, 且基本互联矩阵 $\bar{E}$ 中的元素 $\bar{e}_{ii} = 1 (i = l, l + 1, \cdots, r)$, 其固定互联矩阵 E_0 中除了元素 $e_{ii}^0 = 1 (i = l, l + 1, \cdots, r)$ 外其余元素均为 0, (b) 不变, 则大系统(1)的平衡态 $X(k) = 0$ 是关于 $\bar{E} - E_0$ 部分联结渐近稳定的.

这里 c_{ij} 由式(5)定义, $\bar{\lambda}_M(P_i) = \begin{cases} \max \{ \lambda_M(P_i), 0 \} & (i = 1, 2, \cdots, l) \\ \lambda_M(P_i) & (i = l + 1, \cdots, r) \end{cases}$. 证明类似定理 1, 从略.

2 例 子

为了说明本文所给方法之应用, 考虑有 2 个子系统($n_1 = 2, n_2 = 1$)的三阶离散线性系统

$$\begin{cases} X_1(k+1) = A_1 X_1(k) + e_{11} A_{11} X_1(k) + e_{12} A_{12} X_2(k) \\ X_2(k+1) = e_{21} A_{21} X_1(k) + e_{22} A_{22} X_2(k) + A_2 X_2(k) \end{cases} \tag{15}$$

其孤立子系统

$$\begin{cases} X_1(k+1) = A_1 X_1(k) \\ X_2(k+1) = A_2 X_2(k) \end{cases} \tag{16}$$

满足定理 1 的假设, 其中 $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, A_{21} = [c_2 \quad c_3], A_{22} = -2, A_2 = \frac{3}{2},$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} \end{bmatrix}, B_2 = 1, \mu_1 = -1, \mu_2 = \frac{5}{4}.$$

取 $\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M = \frac{5}{4}$, 则对 $\forall E = (e_{ij})_{r \times r} \in \bar{E} - E_0$, 由式(5) ~ (10) 算得矩阵 C 为

$$C = \begin{bmatrix} \frac{13 + \sqrt{5}}{20} & \frac{47 + 2\sqrt{5}}{11} c_1^2 \\ \frac{29}{3} (c_2^2 + c_3^2) & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

只要选取的关联参数 c_1, c_2, c_3 满足 $c_1^2 (c_2^2 + c_3^2) < \frac{99}{1450(47 + 2\sqrt{5})}$, 系统(15)就部分联结渐近稳定.

3 小 结

本文定理 1、定理 2 给出了具有自相互作用和不具有自相互作用的线性定常离散大系统稳定性的判别方法, 定理 3 的结果表明, 如果孤立子系统不稳定, 则在加强其自相互作用的前提下, 通过与其他子系统之间的相互作用, 也可以使大系统稳定. 例子表明, 本文提出的判别条件方便、实用.

参考文献:

[1] 刘永清. 大型动力系统的理论与应用[M]. 广州 华南理工大学出版社, 1988. 180—236.
[2] GANG Feng. Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems[J]. IEEE Trans Auto, 2002, 47(7): 1108—1112.
[3] NIAN Xiao-hong, LI Ren-fa. Robust stability of uncertain large-scale systems with time delay[J]. International Journal of Systems Science, 2001, 32(4): 541—544.

[4] 陈潮填. 大系统的部分联结稳定性[J]. 广东民族学院学报, 1998(4): 1—8.

[5] SILJAK D D. Large-scale dynamic systems, stability and structure[M]. New York: Elsevier North-Holland, 1978. 18—68.

Connective stability discriminating method for large-scale linear-discrete systems

SUN Shui-ling, CHEN Chao-tian

(Dept. of Computer Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510665, China)

Abstract By use of the vector Lyapunov function method, the connective stability of the large-scale linear-discrete system is studied under the self-mutual connective effect and in the absence of the effect. A method is presented for discrimination of the connective stability based on the position of eigenvalues of an auxiliary matrix, and the algorithm of the method is also given. The effectiveness of this method is verified by an example.

Key words large-scale system; linear-discrete system; connective stability; vector Lyapunov function

《水资源保护》征订启事

(CN32-1356/TV, ISSN1004-6933, 双月刊, 邮发代号 28-298)

《水资源保护》是由环境水利研究会与河海大学共同主办的, 以技术性为主, 兼顾学术性和管理性的技术性期刊, 是全国唯一的水资源保护方面的专业性期刊. 1985年创刊, 国内外公开发行人. 本刊以宣传贯彻国家的水资源保护方针政策, 反映国内外水资源保护的先进科学技术, 促进我国水资源保护和管理以及水环境保护工作为宗旨. 其主要任务是探讨我国水资源保护的技术政策、科学技术、宏观管理及生产实践中的重大问题; 及时反映国内外在水资源保护领域中的新颖实用技术和科技信息; 推广全国各地在水资源保护工作中的成果和经验; 报道有关国内外学术会议、技术交流等消息动态.

主要刊登内容 水资源保护、管理、评价、监测、优化配置、节约以及水环境污染控制和水环境监测仪器等方面的文章, 主要栏目有科技政策、综合述评、学术研究、工程措施、成果推广、经验交流、专题讲座、国外动态等.

主要读者对象 从事水资源保护工作的水利、环保及相关领域的工作者, 有关工程技术、科研人员、管理干部以及大专院校的师生.

《水资源保护》全年定价 36 元. 每逢单月 30 日出版, 可在全国各地邮局办理订阅.

其他订阅方式:

(1) 邮局汇款: 请将订单和邮签与汇款单仔细填好后寄回本刊编辑部(请注明订阅《水资源保护》杂志), 未收到订单者亦可向编辑部函索订单.

(2) 银行汇款: 开户行中国工商银行南京宁海路分理处, 河海大学 4301011409001024513 (请注明订阅《水资源保护》杂志). 编辑部收款后即开具正式发票.

编辑部地址 210098 南京市西康路 1 号 河海大学. **联系电话**:(025)3786642.