

对偶线性规划问题的一类解法

王海鹰,周继东,董祖引

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 通过线性互补问题(LCP)的一个等价系统——Pang 函数的区间斜率的构造,得到了 LCP 问题的 Krawczyk 区间算子的迭代算法,证明了该算法是可以在计算机上得以确认的一种检验方法.同时阐述了如何将对偶线性规划问题转化为 LCP 问题的方法,由此获得计算对偶线性规划问题的区间迭代算法.由算例可知,其数值结果是很好.

关键词 对偶线性规划 线性互补问题 Krawczyk 区间算子 区间斜率扩张

中图分类号 O221 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2003)05-0601-04

线性规划是数学规划中最常见的一种数学模型,在经济学和工程技术等方面都有广泛的应用.对偶线性规划问题是线性规划的一个重要部分,无论是在理论上还是在实际应用上,都有重要作用.设线性规划问题为

$$\min f = c^T X \quad \text{s.t.} \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\max g = b^T Y \quad \text{s.t.} \begin{cases} A^T Y \leq c \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^m$.

(1)和(2)是互为对偶问题,由于(1)与(2)之间存在着密切联系,因此两个问题放在一起研究往往比单独研究一个问题更为方便有效.通常对偶线性规划问题的求解方法是就对偶问题中较易求解的一个问题进行求解,而本文利用线性互补问题(LCP)来统一地求对偶线性规划问题.

线性互补问题(LCP)定义如下 给定 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $q \in \mathbb{R}^n$, 求 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$(Mx + q)^T x = 0 \quad Mx + q \geq 0, x \geq 0 \quad (3)$$

或者证明这样的 x 不存在.

为了把(1)和(2)对偶问题转化为 LCP 问题,在(1)和(2)中分别引入松弛变量 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$, 则规划(1), (2)可分别写成如下形式:

$$\min f = c^T X \quad \text{s.t.} \begin{cases} AX - \alpha = b \\ X \geq 0, \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\max g = b^T Y \quad \text{s.t.} \begin{cases} A^T Y + \beta = c \\ Y \geq 0, \beta \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

因为对任意可行的 X, α 和 Y, β , 由弱对偶定理可得

$$c^T X - b^T Y = (A^T Y + \beta)^T X - (AX - \alpha)^T Y = \beta^T X + \alpha^T Y \geq 0 \quad (6)$$

令 $M = \begin{bmatrix} O & -A^T \\ A & O \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, Mu + q = \begin{bmatrix} O & -A^T \\ A & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \geq 0$

且 $(Mu + q)^T u = [\beta^T \ \alpha^T] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \beta^T X + \alpha^T Y$, 作 LCP 问题

$$(Mu + q)^T u = 0 \quad Mu + q \geq 0 \quad u \geq 0 \quad (7)$$

在对偶理论中, (1)和(2)的最优解是相等的, 即在(6)中, $c^T X^* - b^T Y^* = \beta^T X^* + \alpha^T Y^* = 0$.

其中 X^*, Y^* 分别是(1), (2)的最优解, 因此 X^*, Y^* 也必是 LCP 问题(7) 的解; 反之, LCP 问题(7) 的解也就是(1), (2)的最优解. 求解 LCP 问题(3)有多种方法, 例如化为与之等价的 Pang 函数的求根问题, 即

$$f(x) = \min(Mx + q, x) = 0 \quad (8)$$

由此, 若(8)在某区间上无解, 则(1)和(2)在相应的区间上无可行解. 可以证明(3)与(8)是等价的, 即: 当 x^* 是(3)的解, 当且仅当 x^* 是(8)的解^[1], Pang 函数是分段线性非光滑函数. 笔者的算法用改进的 Krawczyk 区间算子求解(8), 这种算法可以在计算机上验证一个多维区间包含这个问题的精确解或者不包含这个问题的精确解, 并给出近似求解的区间迭代过程.

1 改进的 Krawczyk 区间算子

运用 Krawczyk 区间算子求解非线性方程组的基本要求是该非线性方程组光滑. 然而, (8)是非光滑问题, 为了使用区间方法求解(8), 必须对 Krawczyk 区间算子进行改进. 现给出如下记号: 设 $X = \{x | x \in \mathbb{R}^n, \underline{X} \leq x \leq \bar{X}\}$ 表示一个区间向量, $m(X) = \bar{x}$ 表示 X 的中心, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ($d_i \geq 0, i = 1, \dots, n$), 则 $X = [\bar{x} - d, \bar{x} + d]$. 在(8)中, $a_i^T \in \mathbb{R}^n$ 表示 M 的第 i 行, $e_i^T \in \mathbb{R}^n$ 为第 i 个单位向量, q_i 是 q 的第 i 个分量. 设

$$K_i^+ = \{x | x \in X, (a_i - e_i)^T x + q_i > 0\} \quad K_i^- = \{x | x \in X, (a_i - e_i)^T x + q_i < 0\}$$

对固定 $x \in X$, 作下列线性规划问题: $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $x \notin K_i^-$, 求

$$\inf (a_i - e_i)^T y + q_i \quad \text{s.t.} \quad y \in K_i^- \quad (9)$$

若 $x \notin K_i^+$, 求

$$\sup (a_i - e_i)^T y + q_i \quad \text{s.t.} \quad y \in K_i^+ \quad (10)$$

设(9)或(10)的最优解为 y^i , 令 $t_i = \frac{(a_i - e_i)^T x + q_i}{(a_i - e_i)^T (x - y^i)}$, 作下列区间值函数:

$$G_i(x, X) = \begin{cases} e_i^T & K_i^- = \emptyset \\ a_i^T & K_i^+ = \emptyset \\ a_i^T + [t_i, 1](e_i - a_i)^T & x \notin K_i^-, K_i^+ \neq \emptyset \\ e_i^T + [t_i, 1](a_i - e_i)^T & x \notin K_i^+, K_i^- \neq \emptyset \end{cases} \quad (11)$$

$G_i(x, X)$ 表示区间矩阵 $G(x, X)$ 的第 i 行^[1], 称 $G(x, X)$ 为 f 的区间斜率. 特别地, 取 $x = m(X) = \bar{x}$ 时, 把 $G(\bar{x}, X)$ 简记为 $G(X)$.

设 f 在区间 X 上的区间扩张定义为 $F(X) = f(\bar{x}) + G(X)(X - \bar{x})$, 可以证明, 对任意 $x \in X, f(x) \in F(X)$, 并且可以得到一个区间不包含解的充分条件.

引理 1 令 F 是 f 在 X 上的区间扩张. 如果对某个区间 X 和某个 $i \in \{1, \dots, n\}, \overline{F_i(X)} < 0$, 或 $\underline{F_i(X)} > 0$ 成立, 则 X 中不包含方程(8)的解.

设改进的 Krawczyk 算子

$$K(x, A, X) = x - A^{-1}f(x) + (I - A^{-1}G(x, X))(X - x) \quad (12)$$

式中: A ——一个适当的非奇异矩阵; f ——Pang 函数(式(8)); I ——单位矩阵.

定理 1 设 $K(x, A, X)$ 如(12)所定义, A 是一个非奇异矩阵, 则有: (a) 如果 $x^* \in X$ 是(8)的解, 则 $x^* \in K(x, A, X), x \in X$; (b) 如果 $K(x, A, X) \cap X = \emptyset$, 则在 X 中没有(8)的解; (c) 若存在 $x \in X$ 和非奇异矩阵 A , 使得 $K(x, A, X) \subseteq X$, 则方程(8)在 X 中至少有一解.

证明 (a) 定义映射 $h: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, h(x) = x - A^{-1}f(x)$, A 是非奇异矩阵. 因为 f 是连续的, 所以 $h(x)$ 连续. 任取 $x \in X$, 对任意 $y \in X$, 由 G 的构造 $f(x) - f(y) \in G(x, X)(x - y)$, 得

$$\begin{aligned} h(y) &= x - A^{-1}f(x) + y - x + A^{-1}(f(x) - f(y)) \in \\ &= x - A^{-1}f(x) + (I - A^{-1}G(x, X))(y - x) \subseteq \\ &= x - A^{-1}f(x) + (I - A^{-1}G(x, X))(X - x) = K(x, A, X) \end{aligned} \quad (13)$$

(b) 设(8)的解 $x^* \in X$, 由(a) $x^* = h(x^*) \in K(x, A, X)$, 与已知 $K(x, A, X) \cap X = \emptyset$ 矛盾. (c) 已知 $K(x, A, X) \subseteq X$, 由(13), 对任意 $y \in X, h(x) \in X$, 由 Brouwer 不动点定理, 在凸集 X 中存在 h 的不动点 x^* , 它是

(8)的解.

由此,对初始区间 $X^{(0)}$ 构造区间迭代公式

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap K(\bar{x}^{(k)}, A, X^{(k)}) \tag{14}$$

其中 $\bar{x}^{(k)} = m(X^{(k)})$,若 $G_0 = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}^{(0)}))$ 非奇异,一般取 $A \approx G_0$.

定理 2 设 $G(X)$ 如(12)所定义,记 $G(X) = ([\underline{G}_{ij}, \overline{G}_{ij}])$, n 阶非奇异矩阵 $A = (a_{ij})$. 如果 Pang 函数(8)的解 $x^* \in X$, 并且 $L = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij} - \underline{G}_{ij}|, \sum_{j=1}^n |a_{ij} - \overline{G}_{ij}| \right\}$, 则区间迭代(14) 收敛于 x^* , 即 $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X^{(k)}$.

证明 因为由(14)及定理 1 的(a), $x^* \in X^{(k)}, k=1,2,\cdots$, 所以 $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X^{(k)}$, 并且

$$\begin{aligned} W(K(\bar{x}^{(k)}, A, X^{(k)})) &= W(\bar{x}^{(k)} - A^{-1}f(\bar{x}^{(k)}) + (I - A^{-1}G(X^{(k)}))(X^{(k)} - \bar{x}^{(k)})) = \\ &= W(A^{-1}(A - G(X^{(k)}))(X^{(k)} - \bar{x}^{(k)})) \leq \frac{L}{2} \|A^{-1}\| W(X^{(k)}) \end{aligned}$$

式中: $W(X^{(k)})$ —— 区间 $X^{(k)}$ 的宽度; $\|A^{-1}\|$ —— A^{-1} 的范数.

因此区间迭代(14)是收敛的, 且是线性收敛. 这样区间迭代(14) 给出包含(8)的精确解 x^* 且中心在逼近解宽度足够小的多维区间内, x^* 即是对偶问题(1)和(2)的最优解. 或者由定理 1 知, 可检验出在 $X^{(0)}$ 中不包含(7)的精确解, 即相应的对偶问题(1)和(2)在 $X^{(0)}$ 上没有可行解.

现给出 Pang 函数(8)的区间斜率 $G(X)$ 的算法. (a) 开始, 令 $i = 1, \cdots, n$. (b) 解线性规划问题: $\min (a_i - e_i)^T x + q_i, \text{ s.t. } \underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. 令 y^i 是其最优解. 如果 $y^i \notin K_i^-$, 令 $G_i(X) = e_i^T$; 否则转(c). (c) 解线性规划问题: $\max (a_i - e_i)^T x + q_i, \text{ s.t. } \underline{X} \leq x \leq \overline{X}$. 令 z^i 是其最优解. 如果 $z^i \notin K_i^+$, 令 $G_i(X) = a_i^T$; 否则转(d). (d) 如果 $y^i \in K_i^-, z^i \in K_i^+$, 执行如下步骤: ① 如果 $(a_i - e_i)^T \bar{x} + q_i = 0$, 令 $G_i(X) = [\min(e_i^T, a_i^T), \max(e_i^T, a_i^T)]$; ② 如果 $\bar{x} \in K_i^+$, 令 $t_i = \frac{(a_i - e_i)^T \bar{x} + q_i}{(a_i - e_i)^T (\bar{x} - y^i)}$, 则 $G_i(X) = a_i^T + [t_i, 1] (e_i - a_i)^T$; ③ 如果 $\bar{x} \in K_i^-$, 令 $t_i = \frac{(a_i - e_i)^T \bar{x} + q_i}{(a_i - e_i)^T (\bar{x} - z^i)}$, 则 $G_i(X) = e_i^T + [t_i, 1] (a_i - e_i)^T$. (e) 结束.

另一方面, 采用区间半分算法并由引理 1 把肯定不包含最优解的区间删去. 这样区间不断地缩小, 若初始区间 $X^{(0)}$ 中有解, 使迭代算法收敛到解. 若 $X^{(0)}$ 中无解, 则可判别在 $X^{(0)}$ 中无解.

2 算 例

例 1 $\min f = -2x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 \quad \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 1 \end{cases} \quad (x_i \geq 0, i = 1, \cdots, 4)$

解 由二阶段的单纯形法, 可得最优解 $x^* = (0.25, 0, 0.75, 0.25)^T$ 及最优值 $f^* = -4.75$.

用 LCP 法, $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, c = (-2, -1, -4, -5)^T, b = (-2, 1, 1)^T$.

令 $M = \begin{bmatrix} O & -A^T \\ A & O \end{bmatrix}, q = (c, -b)^T, u = (X, Y)^T$, 则 $(Mu + q)^T u = 0, Mu + q \geq 0, u \geq 0$.

应用 Pang 函数 $F(u) = \min(Mu + q, u)$, 构造区间迭代 $X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap K(\bar{x}, A, X^{(k)})$.

现取初始区间 $X^{(0)} = [[0, 1], [-0.1, 0.9], [0.5, 1.5], [0, 1], [3, 4], [0.5, 1.5]]^T$, 取 $\epsilon = 0.5 \times 10^{-4}$, 经迭代 340 次, 尚有 9 个单元, 如表 1 所示.

单元	1	5	9
X_1	[0.249 980 5, 0.250 012 9]	[0.249 980 5, 0.250 012 9]	[0.249 980 5, 0.250 012 9]
X_2	[0.000 000 0, 0.000 000 0]	[0.000 000 0, 0.000 000 0]	[0.000 000 0, 0.000 000 0]
X_3	[0.750 000 0, 0.750 000 0]	[0.750 000 0, 0.750 000 0]	[0.750 000 0, 0.750 000 0]
X_4	[0.249 950 8, 0.249 983 1]	[0.249 983 1, 0.250 015 5]	[0.250 015 5, 0.250 047 9]
X_5	[3.249 990 0, 3.250 021 0]	[3.249 959 0, 3.249 990 0]	[3.249 990 0, 3.250 021 0]
X_6	[1.000 010 0, 1.000 049 0]	[0.999 971 3, 1.000 010 0]	[0.999 971 3, 1.000 010 0]
X_7	[0.750 000 0, 0.750 000 0]	[0.750 000 0, 0.750 000 0]	[0.750 000 0, 0.750 000 0]

表 1 中任一组数均包含了近似解,因此取第一个单元的中点 $u^* = (0.249\ 997, 0.000\ 00, 0.750\ 000, 0.249\ 967, 3.250\ 006, 1.000\ 030, 0.750\ 000)^T$, 原线性规划的最优解 $x^* = (0.249\ 997, 0.000\ 000, 0.750\ 000, 0.249\ 967)^T$, 最优值 $f^* = -4.749\ 829$; 其对偶问题的最优解 $y^* = (3.250\ 006, 1.000\ 030, 0.750\ 000)^T$, 最优值 $g^* = -4.749\ 829$.

例 2
$$\max f = 2x_1 + 2x_2 \quad \text{s. t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases} \quad (x_1, x_2 \geq 0)$$

将其化为
$$\max f = 2x_1 + 2x_2 \quad \text{s. t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \end{cases} \quad (x_1, x_2 \geq 0)$$

因此 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, c = (-1, -4)^T, b = (2, 2)^T, M = \begin{bmatrix} O & -A^T \\ A & O \end{bmatrix}, q = (c, -b)^T$.

若取初始区间 $X^{(0)}$ 以及可逆矩阵 B ,

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} [0, 2] \\ [0, 2] \\ [0, 2] \\ [0, 2] \end{bmatrix}, G(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} [0, 1/3] & 0 & [-1, -2/3] & [2/3, 1] \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ [1/3, 1] & [1/3, 1] & [0, 2/3] & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

作 $L(\bar{x}^{(0)}, B, X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 3 \\ 1 \\ 61/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [7/9, 1] & 0 & [4/9, 2/3] & [-2/3, -4/9] \\ 0 & 1 & 2/3 & -4/3 \\ [-2/3, -2/9] & [-2/3, -2/9] & [5/9, 1] & 0 \\ [14/9, 2] & 4 & [32/9, 4] & [-17/3, -47/9] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} [-0.667, 4.001] \\ [0, 6] \\ [-1.334, 3.334] \\ [4.663, 36] \end{bmatrix}, \text{所以 } X^{(0)} \cap L(\bar{x}^{(0)}, B, X^{(0)}) = \emptyset, \text{在 } X^{(0)} \text{ 上 LCP 无解, 由定理 1 的 (b), 在 } X^{(0)} \text{ 上线性规划}$$

无可行解. 用作图法容易验证此线性规划无解.

参考文献：

[1] ALEFELD G, CHEN X, POTRA F. Numerical validation of solutions of linear complementarity problems[J]. Numer Math, 1999, 83: 1—23.

A class of solution to dual linear programming problems

WANG Hai-ying, ZHOU Ji-dong, DONG Zu-yin

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract Discussed is the constitution of the interval slope of the Pang function—an equivalent system of the linear complementarity problem (LCP). An iterative algorithm of the Krawczyk interval operator for LCP, which can be confirmed on computer, is given. Besides, a method is introduced to transfer the dual linear programming problem into LCP, thus, the interval iterative algorithm for the dual linear programming problem is obtained. Examples show that the calculated results are satisfactory.

Key words dual linear programming; linear complementarity problem; Krawczyk interval operator; interval slope extension