

# 三维广义有限元及在拱坝计算中的应用

邵国建

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

**摘要** 基于传统有限元理论,将每个结点位移的 Lagrange 型插值空间推广为具有任意多个广义位移的函数展开式,在不增加结点个数的前提下,仅通过提高结点插值函数的阶数,达到提高有限元精度的目的,建立了三维广义八结点等参单元的有限元列式,探讨了广义有限元的程序实施细则.通过对悬臂梁、曲梁以及 5 型拱坝的实例计算,体现了广义有限元法的优越性,为拱坝等结构计算分析提供了一种新途径.

**关键词** 广义位移; 广义形函数; 广义有限元; 拱坝

**中图分类号** :TU311      **文献标识码** :A      **文章编号** :1000-1980(2003)06-0644-05

在现有的数值方法中,传统有限元原理简明,已被工程界普遍接受.为了提高有限元法解的精度,也提出了相应的措施,按逼近真实解的途径,常规改进方法有  $h$  型,这种方法通过减少单元尺寸提高有限元解的精度; $p$  型,这种方法通过增加基函数的阶次来提高有限元解的精度; $hp$  型,这种方法综合了  $h$  型和  $p$  型两种方法. $h$  型自适应方法理论较为流行,但要依赖于一个强大的网格生成器,要求能适应各种复杂结构,网格形态要好,这对  $h$  型方法的应用提出了较高的要求. $p$  型有限元方法是由常规的位移协调元结合数量逐渐增加的附加自由度而构成的,但单元自由度并不是全部在结点上(一些在单元结点上,另一些在单元内部),导致程序实施麻烦,难以被传统有限元接受.

梁国平教授<sup>[1]</sup>吸收了石根华的数值流形方法<sup>[2]</sup>中有限覆盖思想,用于改进传统有限元的计算上,将每个结点位移的 Lagrange 型插值空间推广为具有任意多个广义位移的函数展开式,提出了广义有限元的概念,并从数学上论证了广义有限元方法的可行性.由于广义有限元的自由度全部定义在结点上,而不同 P-version 方法那样定义在单元上,因此容易被传统的有限元程序接受,并且由于其协调性总能保证,故不同结点位移多项式的阶次可以按照具体问题的需要任意选取.文献[3,4]建立了平面问题的广义有限元的数值实施列式,本文将广义有限元的原理应用到三维问题中,将传统八结点等参元广义化,提出三维广义八结点等参元,推导了三维广义有限元的相应列式,并探讨这种广义等参元的数值实施方法.最后结合算例,对提出的三维广义八结点等参元的精度进行了验证,并应用于拱坝分析.

## 1 广义有限元的概念

设  $S_h$  为传统有限元插值空间,采用 Lagrange 型基函数  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ ,则传统有限元位移近似解可表示为

$$u^h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \tag{1}$$

其中结点位移  $u_i (i = 1, 2, \dots, N)$  由离散化虚功方程所对应的代数方程组求解得到.

在广义有限元中构造新的插值空间,将传统有限元中结点位移广义化,认为每个结点位移  $u_i$  具有任意多个广义位移的展开式,即

$$\mathbf{u}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T = \sum_{j=1}^{M_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & f_{ij}(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & f_{ij}(x,y,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,3j-2} \\ d_{i,3j-1} \\ d_{i,3j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得到新的逼近空间

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \begin{bmatrix} f_{ij}(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & f_{ij}(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & f_{ij}(x,y,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,3j-2} \\ d_{i,3j-1} \\ d_{i,3j} \end{Bmatrix} \varphi_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \varphi_i \mathbf{d}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \quad (3)$$
$$\mathbf{d}_i = [d_{i,1} \quad d_{i,2} \quad \cdots \quad d_{i,m}]^T$$

式中： $\mathbf{d}_i$ ——结点广义位移列阵； $\mathbf{N}_i$ ——新的插值函数矩阵。

由于新的插值函数  $\mathbf{N}_i$  中包含有传统有限元中的插值函数  $\varphi_i$ ，因此广义有限元的协调性自然得到保证。由此构造出新的有限元插值方法称为广义有限元法。显然，当取  $M_i = 1$  及  $f_{ij}(x,y,z) = 1$  时，即式(2)退化为

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ d_{i,3} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

此时，广义有限元就退化为传统有限元方法。

对于复杂问题的微分方程及其解在求解的不同区域往往有不同的特性，需要采用不同类型的逼近函数，从式(2)中可看出，对不同的结点  $i$  可以采用完全不同的插值函数  $f_{ij}(x,y,z)$ ，从而新的逼近空间很容易满足此要求。

## 2 三维广义八结点等参单元

### 2.1 单元位移模式及广义形函数

类似与传统有限元中三维八结点等参数单元，广义有限元中单元位移模式可表示为

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{d}_e \quad (5)$$

式中： $\mathbf{d}_e$ ——单元结点广义位移列阵； $\mathbf{N}_e$ ——单元的位移插值函数矩阵，称为广义形函数矩阵。广义形函数与传统有限元的形函数  $\varphi_i$  之间的关系为

$$\mathbf{N}_i = \varphi_i \mathbf{F}_i \quad (6)$$

式中： $\mathbf{F}_i$ ——结点位移的插值函数，该函数作为真实场函数的局部逼近，可人为选取，最简单的是取为坐标的多项式； $\mathbf{d}_i$ ——结点  $i$  的广义位移列阵，结点的广义位移个数与结点的插值函数的阶数应具有一一对应关系。

若结点位移插值函数选取为 0 阶，有

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_i = \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ d_{i,3} \end{Bmatrix}$$

对应每个结点有 3 个自由度，即退化为传统有限元法。

若结点位移插值函数选取为 1 阶，有

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_i = [d_{i,1} \quad d_{i,2} \quad \cdots \quad d_{i,12}]^T$$

对应每个结点有 12 个自由度。

随着结点位移的插值函数阶次的提高，广义形函数的阶次也相应提高。考虑到实际工程的应用和精度要求，本文主要讨论结点位移插值函数为 1 阶的情形，即对应每个结点具有 12 个自由度的问题。此时，结点  $i$  的广义形函数为

$$\mathbf{N}_i = \varphi_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, 8) \quad (7)$$

2.2 应变矩阵

针对 1 阶的结点位移插值函数,利用几何方程,有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L} \boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{B} \boldsymbol{d}_e = [\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_8] \boldsymbol{d}_e \tag{8}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial y} & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial z} & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial(z\varphi_i)}{\partial x} \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (i = 1, 2, \cdots, 8) \tag{9}$$

式(9)为对应 1 阶结点位移插值函数的应变矩阵中的各子矩阵的展开式.

2.3 单元劲度矩阵

考虑线弹性问题,由虚功原理可导出单元劲度矩阵的一般表达式,为

$$\boldsymbol{k} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \tag{10}$$

其中  $\boldsymbol{D}$  为弹性矩阵.

对三维八结点单元,单元劲度矩阵可以用 64 个子矩阵表示,对任一子矩阵  $\boldsymbol{k}_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, 8)$  可写成为

$$\boldsymbol{k}_{ij} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}_i^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_j \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \tag{11}$$

对应 1 阶的结点位移插值函数,  $\boldsymbol{k}_{ij}$  为  $12 \times 12$  阶的矩阵,此时单元劲度矩阵为  $96 \times 96$  阶的矩阵.

2.4 单元等效载荷列阵

根据虚功相等原则,将作用在单元上的集中力、体积力、表面力等效到结点广义自由度上,形成单元的等效结点载荷列阵:

$$\boldsymbol{R}^e = \boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{P} + \iiint_{\Omega} \boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{p} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z + \iint_{s_g} \boldsymbol{N}_e^T \bar{\boldsymbol{p}} \mathrm{d}s \tag{12}$$

式中:  $\boldsymbol{P}$ ——集中力列阵;  $\boldsymbol{p}$ ——体积力列阵;  $\bar{\boldsymbol{p}}$  为表面力列阵. 对于 1 阶的结点位移插值函数而言,单元等效载荷列阵  $\boldsymbol{R}^e$  为  $96 \times 1$  的列阵.

3 程序实施

由于广义有限元与传统有限元一样,自由度均定义在单元的结点上,因此,广义有限元的程序研制与传统有限元法类似,这样就可以直接在传统有限元程序的基础上进行修改. 修改主要涉及单元形函数矩阵、单元应变矩阵、单元劲度矩阵和单元等效载荷列阵. 对于传统三维八结点等参单元,其单元劲度矩阵采用 8 个  $(2 \times 2 \times 2)$  高斯积分点进行. 对于广义有限元中选用 1 阶的结点位移插值函数时,由于被积函数的阶次的提高(至少提高一次),此时单元劲度矩阵宜采用 27 个  $(3 \times 3 \times 3)$  高斯积分点进行,相应的结点载荷列阵按结点位移的插值函数形式等效为 12 个自由度上的列阵.

由于广义有限元中结点的自由度为广义位移,这些结点广义位移不一定都具有各自的物理意义,故在求得结点广义位移后,还需通过结点的位移插值函数求得具有物理意义的结点真实位移值.

值得指出,为了解决实际问题的计算效率与精度这一问题,可针对具体问题的结构形式或所关心问题的区域,将广义有限元与传统有限元联合运用. 因为广义有限元中结点位移的插值多项式阶次可以按照问题的需要任意选取,而不影响位移的协调性. 对三维广义八结点等参单元中按 1 阶结点位移插值函数建立的程序,此时对每个结点有 12 个广义位移(自由度),只要将某些结点后 9 个广义位移(自由度)施加约束,那么结

点广义位移就自然退化成传统有限元中的结点位移. 由此只要对结点的约束信息作适当的处理, 无需修改广义有限元的程序就可完成广义有限元与传统有限元的联合运用问题.

4 算例分析

4.1 悬臂梁问题

悬臂梁的长度  $L = 20\text{ m}$ , 宽度  $W = 1\text{ m}$ , 高度  $H = 1\text{ m}$ , 弹性模量  $E = 1.0 \times 10^5\text{ kPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.0$ . 自由端分别受集中荷载  $P = 1.0\text{ kN}$  和集中力偶矩  $M = 10.0\text{ kN}\cdot\text{m}$  作用, 计算这两种情况, 剖分成两个单元如图 1 所示. 采用本文广义有限元方法计算自由端的挠度,  $y = 17.887\text{ m}$  横截面在高斯积分点 ( $x = 0.2887\text{ m}$ ,  $z = 0.2887\text{ m}$ ) 处的弯曲正应力和垂向剪应力. 计算结果和弹性力学理论解列于表 1.

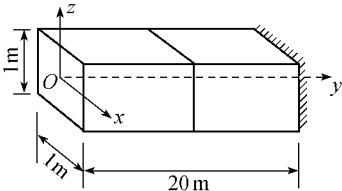


图 1 悬臂梁  
Fig.1 Cantilever beam

表 1 特征点处的挠度和应力

| Table 1 Deflection and stress at marked points |                   |      |             |             |
|------------------------------------------------|-------------------|------|-------------|-------------|
| 载荷                                             | 方 法               | 挠度/m | 正应力<br>/kPa | 剪应力<br>/kPa |
| 集中力                                            | 本文                | 0.30 | 52.87       | 1.0         |
|                                                | 弹解 <sup>[5]</sup> | 0.32 | 61.96       | 1.0         |
| 集中力偶                                           | 本文                | 0.24 | 34.64       | 0.0         |
|                                                | 弹解 <sup>[5]</sup> | 0.24 | 34.64       | 0.0         |

4.2 曲悬臂梁问题

内径  $r = 4.12$ , 外径  $R = 4.32$ , 深度  $t = 0.1$ , 弹性模量  $E = 1.0 \times 10^7$ , 泊松比  $\mu = 0.25$ , 如图 2 所示. 载荷分顶端受平面内竖向单位剪力与垂直于平面的水平向单位剪力两种情况计算. 采用本文方法计算顶端沿载荷方向的位移列于表 2, 其结果较好.

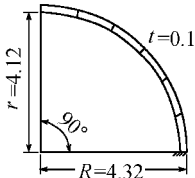


图 2 曲悬臂梁  
Fig.2 Curved cantilever beam

表 2 顶端载荷方向位移

| Table 2 Displacement of the tip in loading direction |         |          |         |
|------------------------------------------------------|---------|----------|---------|
| 载荷                                                   | 本文      |          | 文献[6]   |
|                                                      | 网格(6×1) | 网格(12×1) |         |
| 竖向剪力                                                 | 0.08699 | 0.08804  | 0.08734 |
| 水平向剪力                                                | 0.4761  | 0.4853   | 0.5022  |

4.3 5 型拱坝

本算例引自英国土木工程学会拱坝专题研究中所拟定的“5 型变厚度双曲拱坝”. 坝高 120 m, 坝顶厚度 5.35 m, 坝底厚度 23.35 m, 坝顶河谷宽度 285 m, 坝底河谷宽度 94.4 m, 坝体和基础弹性模量  $E = 2.0 \times 10^7\text{ kPa}$ , 泊松比  $\mu = 0.15$ . 由于河谷对称, 取拱坝一半进行分析, 尺寸如表 3 所示, 假定地基是刚性的, 坝体剖分成 28 个单元采用本文方法进行计算.

本文计算结果拱冠截面的径向位移如图 3 所示, 拱冠截面的最大径向位移为 67.46 mm, 虚线为文献[7]将坝体剖分成 32 个 20 结点实体单元的结果.

表 3 双曲拱坝参数

| Table 3 Parameters of double curved arch dam |          |           |           |
|----------------------------------------------|----------|-----------|-----------|
| 高程/m                                         | 半中心角/(°) | 厚度 $t$ /m | 半径 $r$ /m |
| 0.0                                          | 40.0     | 23.35     | 73.40     |
| 20.0                                         | 43.0     | 21.10     | 115.26    |
| 40.0                                         | 46.0     | 18.55     | 143.54    |
| 60.0                                         | 49.0     | 15.70     | 164.57    |
| 80.0                                         | 52.0     | 12.55     | 178.54    |
| 88.0                                         | 53.2     | 11.17     | 178.92    |
| 100.0                                        | 55.0     | 9.10      | 179.47    |
| 120.0                                        | 53.0     | 5.35      | 170.80    |

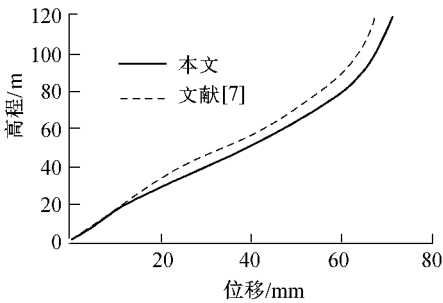


图 3 拱冠截面的径向位移

Fig.3 Radial displacement of crown cantilever

## 5 结 语

广义有限元保持了传统有限元空间的协调性,提出了一类新的逼近空间,拓宽了传统有限元的插值空间,广义有限元方法无需增加结点,仅通过提高结点插值函数的阶次,便可有效地提高数值解的精度.由于广义有限元和传统有限元一样,其自由度全部定义在单元的结点上,因此容易被传统有限元程序接受,广义有限元的程序研制可以直接在现有传统有限元程序的基础上作适当的修改实现,并且传统有限元的前后处理仍然可直接利用.广义有限元中结点位移插值函数的阶次可按照具体问题的需要而任意选取,故对具有不同结构形式的问题也可采用广义有限元与传统有限元的联合运用,只需对相应结点的约束信息作适当的处理即可实现.

## 参考文献:

- [1] 梁国平,何江衡. 广义有限元法——一类新的逼近空间[J]. 力学进展,1995,25(4):562—565.
- [2] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京:清华大学出版社,1997. 1—14.
- [3] 栾茂田,田荣,杨庆. 广义结点有限元[J]. 计算力学学报,2000,17(2):192—200.
- [4] 邵国建,刘体锋. 广义有限元及其应用[J]. 河海大学学报(自然科学版),2002,30(4):28—31.
- [5] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京:高等教育出版社,2001. 109—113.
- [6] MACNEAL R H, HARDER J N. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy[J]. Finite Elements Anal Des, 1985 (1):3—20.
- [7] ERGATANDIS J, IRONS B M, ZIENKIEWICZ O C. Three-dimensional analysis of arch dams and their foundations[A]. Proc Symb Arch Dams[C]. London: Inst Civil Engng, 1968. 37—50.

## Application of 3-D generalized finite element to arch dam calculation

SHAO Guo-jian

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

**Abstract** Based on the conventional finite element, the Lagrange interpolation space for displacement at each node is extended to an arbitrary function expansion with any number of generalized displacements. Without the increase of the number of nodes, the precision of numerical calculation is improved only by improvement of the order of the interpolation function at each node. In this paper, a 3-D finite element numerical form for generalized 8-node isoparametric element is developed, and the numerical calculating program of the generalized finite element form is also discussed. The computational examples of a cantilever beam, a curved cantilever beam and a type 5 arch dam indicate the advantages of the generalized finite element method, which provides a new method for structural analysis and calculation for arch dams.

**Key words** generalized displacement; generalized shape function; generalized finite element; arch dam