

一种新的求解 K 因子的位移插值法

巫绪涛 杨伯源 李和平

(合肥工业大学土木建筑工程学院,安徽 合肥 230009)

摘要 :介绍了求解应力强度因子(K 因子)的一种新型位移插值法 ,以受均布载荷作用下的无限大体深埋椭圆裂纹问题 ,论证了新方法的位移插值基础 ,研究了两种方法的理论插值误差 .理论分析和数值结果均证明 ,求解 K 因子的位移插值法的精度高于传统的蜕化奇异等参元法 .

关键词 :应力强度因子 ;位移插值法 ;蜕化奇异等参元

中图分类号 :O346.1 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2003)06-0662-04

应力强度因子(K 因子)是描述裂纹尖端附近应力场强弱程度的一个重要参量 ,它的求解方法一直为众多学者所关注 .与解析法和实验法相比 ,数值分析法求解 K 因子受各种因素的影响较小 ,方法固定统一 ,适合求解复杂的工程问题 .其中较成熟的方法有 边界配点法 ,边界元法 ,裂尖奇异元法 ,虚裂纹扩展法 ,刚度导数法 , J 积分法 ,蜕化等参元法等 .

文献 [1 2] 提出的蜕化奇异等参元及基于该单元求解 K 因子的方法形式简单、精度较高 ,得到了广泛使用 .但该方法忽略了裂尖附近位移场高阶项的影响 ,求解精度受裂尖单元尺寸的大小、研究对象的形状、材料的泊松比影响较大^[2] .本文提出的求解 K 因子的新型位移插值法继承了蜕化奇异等参元法的优点 ,并有效地解决了上述问题 ,计算精度和稳定性都得到提高 ,对于平面问题 ,误差仅 0.5% ,对于空间问题 ,整体误差在 3% 左右^[3~5] .

1 方法的理论基础

蜕化奇异等参元在许多断裂力学文献里都有介绍^[1 2] .本文仅讨论三维裂纹问题 ,图 1 所示为空间蜕化奇异等参元 .通过有限元计算获得各节点的位移 ,传统的蜕化奇异等参元法通过下式计算 K 因子^[2] :

$$\left. \begin{aligned} K_I &= (4v_{11} - v_5)E \sqrt{\pi(2l)} [\chi (1 - \mu^2)] \\ K_{II} &= (4u_{11} - u_5)E \sqrt{\pi(2l)} [\chi (1 - \mu^2)] \\ K_{III} &= (4w_{11} - w_5)E \sqrt{\pi(2l)} [\chi (1 + \mu)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 : E ——弹性模量 ; μ ——泊松比 ; l ——裂尖单元沿裂纹面尺寸 ;
 v ——垂直于裂纹面的节点位移 ; u ——沿裂纹周边曲线法线方向的节点位移 ; w ——沿裂纹周边曲线切线方向节点位移 .计算中假设 (a)裂尖单元的 5 ,11 节点所在边垂直于裂纹周边曲线 (b)裂纹上下面位移对称或反对称 ,只研究一侧面上节点的位移 .详细讨论见文献 [3] .

取蜕化奇异等参元及相邻辐射式普通单元的若干节点的位移 ,使用下式计算各节点的表观 K 因子 .

$$\left. \begin{aligned} K_{Ii}^* &= v(d_i \pi)E \sqrt{\pi(2d_i)} [\chi (1 - \mu^2)] \\ K_{IIi}^* &= u(d_i \pi)E \sqrt{\pi(2d_i)} [\chi (1 - \mu^2)] \\ K_{IIIi}^* &= w(d_i \pi)E \sqrt{\pi(2d_i)} [\chi (1 + \mu)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

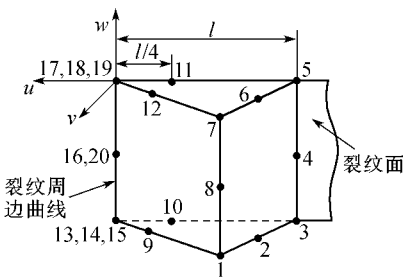


图 1 空间 20 节点蜕化奇异等参元
Fig.1 20-node degenerate singular isoparametric element

根据各节点的表现 K 因子,使用最小二乘法的线性回归得到裂尖处的

$$K_{裂尖} = \left(\sum K_i^* - c \sum d_i \right) / n \tag{3}$$
$$c = \left(n \sum K_i^* d_i - \sum K_i^* \sum d_i \right) / \left[n \sum d_i^2 - \left(\sum d_i \right)^2 \right]$$

式中: n ——插值点数,取 4 或 5 点; d_i ——各插值点到裂尖的距离.通过检验线性相关系数,决定拟合精度和插值区间,线性相关系数越靠近 ± 1 ,则表明插值精度越高.

2 位移插值基础及理论误差

2.1 比较两种方法的插值基础

利用式(2)将式(1)改写成

$$(K - K_{l/4}^*) / \sqrt{l/4} = (K - K_l^*) / \sqrt{l} \tag{4}$$

式中: K ——裂尖 K 因子; K^* ——使用式(2)计算的表现 K 因子.式(4)说明传统的蜕化奇异等参元法采用平方根线性插值,而本文提出的数值外插法采用线性插值,这是两者的主要区别.

对于平面和空间 I 型裂纹问题,作者已进行过详细讨论和论证^[3~5],本文将只研究空间 II 型和 III 型裂纹问题. II 型和 III 型裂纹的精确位移场较难获得,陈梦成等^[6]利用超奇异积分方程法,获得了图 2 所示无限大体受均匀切应力作用的深埋椭圆裂纹的精确位移场.笔者引用该结果来论证新方法的位移插值理论基础.根据文献[6],利用坐标变换得到裂纹周边任意一点 A 的法向位移为

$$u(x, y) = \frac{2\tau a^2 k^2 (1 - \mu^2)}{c a_n E} \left[\frac{a \cos \omega \cos \theta}{B(k)} + \frac{c \sin \omega \sin \theta}{\alpha(k)} \right] \left(1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} \right)^{1/2} \tag{5}$$

$$B(k) = (k^2 - \mu)E(k) + \mu k'^2 K(k) \quad \alpha(k) = (k^2 + \mu k'^2)E(k) - \mu k'^2 K(k)$$
$$k'^2 = a^2/c^2 \quad k^2 = 1 - k'^2$$
$$a_n = a \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta} / c$$

式中 $K(k)$ 和 $E(k)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分.

式(5)适用于整个裂纹面,则可求得距离 A 点为 r 的 B 点的法向位移

$$u_B = \frac{2A\tau(1 - \mu^2)}{a_n E} \left[2ra_n - \frac{a^2}{c^4 a_n^2} (a^4 \cos^2 \theta + c^4 \sin^2 \theta) r^2 \right]^{1/2} \tag{6}$$

$$A = ak \sqrt{a \cos \omega \cos \theta / B(k) + c \sin \omega \sin \theta / \alpha(k)} / c$$

将式(6)代入式(2),计算 B 点的 K_{II}^* ,

$$K_{II}^* = A\tau \sqrt{\pi/a_n} [1 - a^2 (a^4 \cos^2 \theta + c^4 \sin^2 \theta) r / (2c^4 a_n^3)]^{1/2} \tag{7}$$

A 点处 K_{II} 的理论解^[6]

$$K_{II} = \tau a k^2 \sqrt{\pi/a_n} [a \cos \omega \cos \theta / B(k) + c \sin \omega \sin \theta / \alpha(k)] = A\tau \sqrt{\pi/a_n} \tag{8}$$

则式(7)可改写成

$$K_{II}^* = K'_{II} [1 - r \beta a_n]^{1/2} \tag{9}$$

$$\beta = [(a/c)^2 + \tan^2 \theta] [(a/c)^4 + \tan^2 \theta] > 1$$

将式(9)在 A 点($r = 0$)进行幂级数展开,有

$$K_{II}^* = K'_{II} [1 - r \beta a_n - r^2 \beta (32\beta a_n^2) - \alpha(r^3)] \tag{10}$$

由于两种方法要求的插值区域均在裂纹前缘附近,一般 $r < 0.2a_n$,可以发现表现 K 因子与到裂尖距离 r 的线性程度相当高,这就是采用线性插值的理论基础.

2.2 两种方法计算 K 因子的理论误差

将裂纹面节点到裂纹周边曲线的距离 r_i 代入式(10)得到

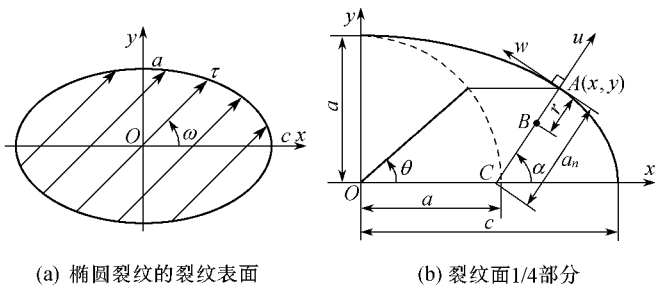


图 2 受均匀切应力 τ 作用的无限大体椭圆裂纹
Fig.2 Elliptical crack in infinite solid under uniform shear stress τ

$$K_{II}^* = K'_{II} [1 - r_i \chi(2\beta a_n)]^{1/2}$$

(11)

利用这些值进行最小二乘法线性插值有

$$K_{II} = K'_{II} c_i [1 - r_i \chi(2\beta a_n)]^{1/2}$$

(12)

$$c_i = \frac{1}{n} \left[1 - \frac{nr_i - \sum r_i}{n \sum r_i^2 - (\sum r_i)^2} \sum r_i \right]$$

以两层单元 4 点插值为例 取 $n = 4$, $r_1 = 4/l$, $r_2 = l$, $r_3 = 1.5l$, $r_4 = 2l$,代入式 (12) 整理得到

$$K_{II} = K'_{II} \left[\frac{98}{107} \left(1 - \frac{l}{8\beta a_n} \right)^{1/2} + \frac{41}{107} \left(1 - \frac{l}{2\beta a_n} \right)^{1/2} + \frac{3}{107} \left(1 - \frac{3l}{4\beta a_n} \right)^{1/2} - \frac{35}{107} \left(1 - \frac{l}{\beta a_n} \right)^{1/2} \right]$$

(13)

式 (13) 按幂级数展开有

$$K_{II} = K'_{II} \{ 1 + 0.025 \chi [l \chi(\beta a_n)]^2 + O[\chi [l \chi(\beta a_n)]^3] \}$$

(14)

直接用蜕化奇异等参元求 K 因子的公式可以写成

$$K_{II} = 4K_{II(l/4)}^* - K_{II(l)}^*$$

(15)

由式 (15) 得到

$$K_{II} = K'_{II} \{ 1 + 0.12 \chi [l \chi(\beta a_n)] + 0.027 \chi [l \chi(\beta a_n)]^2 + O[\chi [l \chi(\beta a_n)]^3] \}$$

(16)

上述讨论过程完全适用于Ⅲ型裂纹. 由式 (14) 及 (16) 可以发现, 本文提出的位移插值法要比常用的蜕化奇异等参元法高一阶精度, 两者误差阶次分别为 $0.025 \chi [l \chi(\beta a_n)]^2$ 和 $0.12 \chi [l \chi(\beta a_n)]$. 应该指出, 上面所讨论的仅仅是两种方法的理论误差, 实际误差还应包括数值计算产生的误差.

3 数值结果及误差分析

为直接验证两种方法的计算精度, 计算了受均匀切应力作用的椭圆裂纹问题的 K 因子, 并与解析解进行了比较, 结果如图 3 所示. 可以发现本文提出的位移插值法精度高于蜕化奇异等参元法.

文献 [2, 7] 指出, 用蜕化奇异等参元法直接计算 K 因子时, 单元网格大小、材料泊松比值对计算精度影响很大. 下面对产生这种现象的原因进行讨论.

首先, 有限元位移计算误差产生了 K 因子的计算误差. 由于线弹性裂纹场的全域应变场是奇异项与非线性项之和, 有限元计算应变场是奇异项与常数项之和. 裂尖单元尺寸增大时, 要用常数项应变表征非线性项; 裂尖单元尺寸减小时, 裂尖附近的奇异应变由其它没有奇异性的普通单元所表征. 使得两种误差的综合效应最小的单元尺寸应该是所谓的最佳单元尺寸. 这种最佳单元尺寸对于每个具体问题是不同的. 所以, 提出的新方法考虑到上述两种误差效应, 要求在裂尖奇异单元和周围普通单元同时进行插值, 利用线性相关系数决定最佳单元尺寸. 计算结果反映, 当单元尺寸很小或很大时, 线性相关系数均不好, 并且对于不同边界条件下的相同裂纹形状, 得到的最佳尺寸都不一样.

其次, 对于平面应力裂纹问题, 两种方法计算的 K 因子均优于三维裂纹问题^[3~5]. 这一方面是由于空间断裂问题的位移计算精度要低于平面应力问题, 另一方面是由于平面应力断裂问题的非线性应变场是均匀的, 而三维裂纹问题的裂纹面应力状态较复杂, 靠近裂纹周边曲线时, 平面应变状态占优, 远离裂纹周边曲线或靠近自由端面时, 平面应力状态占优. 泊松比的大小, 对这两种状态也有较大影响. 因此在一定尺寸范围内, 用统一的公式不能同时表征这两种应力状态.

4 结 论

本文提出了一种计算 K 因子的新型位移插值法, 与传统的蜕化奇异等参元法相比, 该法考虑到有限元

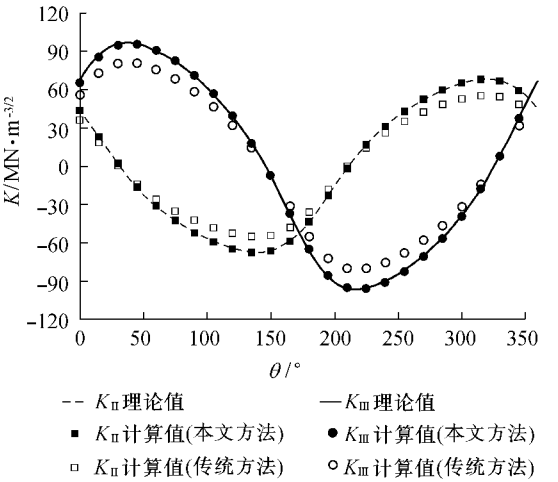


图 3 无限大体椭圆裂纹均匀剪切下的 K 因子
Fig.3 SIF of elliptical crack in infinite solid under uniform shear stress

计算断裂问题的误差,具有较高精度和稳定性,并能以一定的方式决定不同裂纹问题的优化裂尖单元尺寸.结合Ⅱ型和Ⅲ型三维裂纹问题对两种方法的插值基础、理论误差和计算误差进行了讨论.新方法的线性插值有理论根据,精度比传统的蜕化等参元法高一阶.由于该法仅涉及裂尖附近的位移场,没有繁杂的后处理或理论推导,因而一切能较精确求得断裂问题位移场的其它数值方法都可以和该法结合使用,例如三次等参元法、特殊裂尖元法、边界元法等.

参考文献:

- [1] BARSOUM R S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics[J]. Int J Num Meth Engng, 1976, 10: 25—37.
- [2] INGRAFFEA A R, MANU C. Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point element[J]. Int J Num Meth Engng, 1980, 14: 1427—1447.
- [3] 巫绪涛. 高精度求解三维应力强度因子方法的研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 1999.
- [4] 李和平, 巫绪涛, 杨泊源. 数值外插法求解 K 因子的插值基础与误差估计[J]. 合肥工业大学学报, 2000, 23(6): 962—965.
- [5] 李和平, 巫绪涛, 杨泊源. 高精度求解应力强度因子的插值外插法[J]. 机械强度, 2001, 23(2): 209—212.
- [6] 陈梦成. 椭圆平片裂纹前沿应力强度因子解析解的超奇异积分方程法[J]. 固体力学学报, 1999, 20(4): 331—334.
- [7] LYNN P P, INGRAFFEA A R. Transition elements to be used with quarter-point crack-tip element[J]. Int J Num Meth Engng, 1978, 12: 1031—1036.

A new displacement extrapolation method for calculation of SIF

WU Xu-tao, YANG Bo-yuan, LI He-ping

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract An introduction is given to a new displacement extrapolation method for calculation of the stress intensity factor (SIF). In combination with the problem of elliptical cracks in an infinite embedded body under uniformly distributed loads, the basis for the new extrapolation method is verified. The error of extrapolation by two methods, i. e. the displacement extrapolation method and the degenerate singular isoparametric element method, is analyzed. Theoretical analysis and numerical calculation show that the precision of the displacement extrapolation method is higher than that of the degenerate singular isoparametric element method.

Key words stress intensity factor (SIF); displacement interpolation method; degenerate singular isoparametric element