

结点不平衡力矩分配传递无限次的极限公式

徐汉忠

(河海大学土木工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :对有 7 个及 7 个以下的可转动结点的刚架 ,给出了分配传递无限次的杆端弯矩极限值的表达式及其算例 .该极限公式既能手算又便于电算 ,可应用于高层框架分层后的计算 .

关键词 :结构力学 ;框架结构 ;位移法 ;弯矩分配法 ;闭合解

中图分类号 :TU311.1 文献标识码 :A 文章编号 :1000-198X(2003)06-0678-04

1 欲 解 问 题

图 1 所示的有 2~7 个可转动结点的刚架 ,不考虑侧移的影响 .2 个可转动结点是指去掉 1'1''以左部分和 a'a''以右部分后的剩余部分 ,其余类推 .

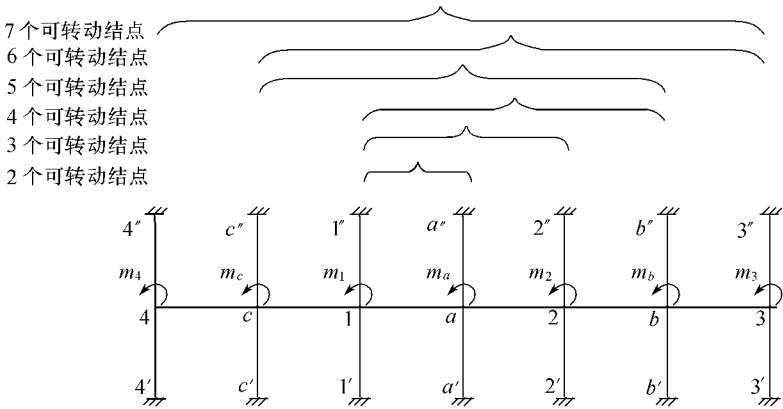


图 1 2~7 个可转动结点的刚架

Fig.1 Rigid frame with 2~7 rotatable joints

对图 1 所示的刚架结点不平衡力矩进行无限次分配传递 ,求得无穷多次分配弯矩和传递弯矩之和 ,该和为欲求的精确解或闭合解 ,表达式十分简单 ,便于应用 .

文献 [1 2]给出了 2~3 个可转动结点的弯矩分配传递无限次的极限公式 ,文献 [3~5]给出弯矩分配传递无限次的极限公式的应用 ,本文给出 2~7 个可转动结点的弯矩分配传递无限次的极限公式 .

2 极 限 公 式

a. 图 1 刚架中有 3 个可转动结点 ,仅 $m_a \neq 0$,可用图 2 给出该情况的极限公式 .

图 2 中弯矩分配(distribution)系数用 D 加 2 个下标表示 ,传递(carried-over)系数用 C 加 2 个下标表示 ,并有

$$g_{1a} = g_{a1} = C_{1a}C_{a1}D_{1a}D_{a1} \qquad g_{2a} = g_{a2} = C_{a2}C_{2a}D_{a2}D_{2a} \qquad (1)$$

$$G_a = 1/[1-(g_{a1} + g_{a2})] \qquad (2)$$

可见 g_{1a} 为杆件 1a 两端的分配系数(D_{1a} , D_{a1})和双向传递系数(C_{1a} , C_{a1})的乘积 ,故 g_{1a} 为杆件 1a 的性质系数 ,余同 . G_a 为结点 a 的性质系数^[2 3] ,因为它与在结点 a 相连的杆 a1 和 a2 的性质系数有关 .叠加图 2 中经

收稿日期 :2003-02-18

作者简介 :徐汉忠(1945—) ,男 ,硕士 ,教授 ,从事力学理论研究 .

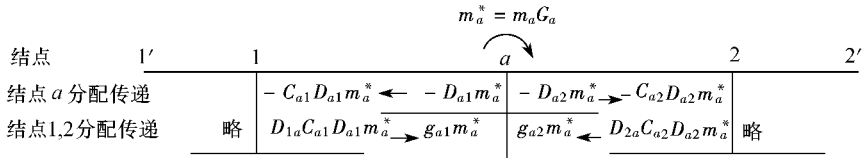


图 2 刚架中有 3 个可转动结点,仅 $m_a \neq 0$ 时的极限公式

Fig.2 Formula for rigid frame with 3 rotatable joints under action of $m_a \neq 0$

过两次分配和传递的弯矩得到的是精确解答,它相当于经过无数次分配和传递后得到的结果。

b. 图 1 刚架中有 3 个可转动结点, $m_a \neq 0, m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$ 时的极限公式. 将 m_1, m_2 分别在结点 1, 2 按传统弯矩分配法分配一次, 传递一次, 使结点 1, 2 上无不平衡力矩, 得只有结点 a 上有不平衡力矩, 该问题的公式已在 a 中给出。

c. 图 1 刚架中有 2 个可转动结点, 仅 $m_a \neq 0$ 时的极限公式. 令 3 个可转动结点的极限公式中 $g_{a2} = 0$, 可得 2 个可转动结点的极限公式。

d. 图 1 刚架中有 7 个可转动结点, 仅 $m_a \neq 0$ 时的极限公式. 对结点 a 的不平衡力矩 m_a , 用三结点同时放松的弯矩分配法^[3, 4]列表计算一个循环, 见图 3. 图 3 中一个循环分 2 个步骤. 第一步, 用刚臂固定结点 b, c 3 和 4, 同时放松结点 1, $a, 2$ 对结点 a 的等效不平衡力矩 ($m_a^* = m_a G_a$) 进行分配传递, 在 b 结点产生不平衡力矩 N_b , 在 c 结点产生不平衡力矩 N_c :

$$N_b = C_{2b}D_{2b}C_{a2}D_{a2}m_a^* \quad N_c = C_{1c}D_{1c}C_{a1}D_{a1}m_a^* \tag{3}$$

第二步, 首先用刚臂固定结点 $a, 1, c$ 和 4, 同时放松结点 2, $b, 3$ 对结点 b 的等效不平衡力矩 ($N_b^* = N_b G_b$) 进行分配传递, 在 a 结点产生不平衡力矩 $C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2}G_b N_b$; 其次用刚臂固定结点 $a, 2, b$ 和 3, 同时放松结点 4, $c, 1$ 对结点 c 的等效不平衡力矩 ($N_c^* = N_c G_c$) 进行分配传递, 在 a 结点产生不平衡力矩 $C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1}G_c N_c$. 从而在 a 结点产生总不平衡力矩

$$m_a^2 = C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1}G_c N_c + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2}G_b N_b \tag{4}$$

其中 m_a^2 表示第二次的平衡力矩. 将式 (3) 代入式 (4) 得

$$m_a^2 = C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1}G_c C_{1c}D_{1c}C_{a1}D_{a1}m_a^* + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2}G_b C_{2b}D_{2b}C_{a2}D_{a2}m_a^* = (G_c g_{a1} g_{c1} + G_b g_{a2} g_{b2}) m_a^* \tag{5}$$

在 a 结点产生等效不平衡力矩

$$m_a^{*2} = m_a^2 G_a = G_a (G_c g_{a1} g_{c1} + G_b g_{a2} g_{b2}) m_a^* \tag{6}$$

同上循环无穷多次, 在 a 点形成的等效不平衡力矩之和用 H_a^* 表示, 显然

$$H_a^* = m_a^* + m_a^{*2} + m_a^{*3} + m_a^{*4} + \dots \tag{7}$$

由式 (6) 可知, 式 (7) 右边为公比 $G_a (G_c g_{a1} g_{c1} + G_b g_{a2} g_{b2})$ 小于 1 的无穷等比级数的和, 故

$$H_a^* = m_a^* G_{abc} = m_a G_a G_{abc} \tag{8}$$

$$G_{abc} = 1 / [1 - (G_a G_c g_{a1} g_{c1} + G_a G_b g_{a2} g_{b2})] \tag{9}$$

将图 3 的等效不平衡力矩由 m_a^* 改为 H_a^* 后成图 4, 叠加图 4 分配力矩和传递力矩, 就得到图 1 问题在原 m_a 作用下各杆端弯矩的闭合解, 即欲求的极限公式。

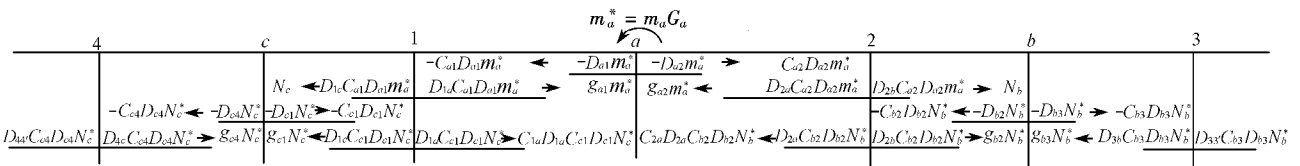


图 3 m_a 作用的第一个循环

Fig.3 First cycle under the action of m_a

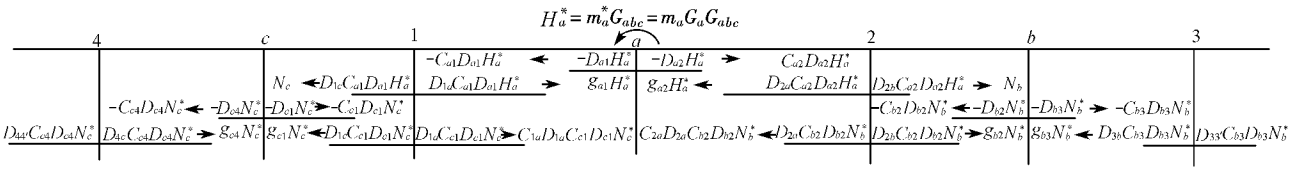


图 4 m_a 作用的闭合解

Fig.4 Closed solution under the action of m_a

算例 设图 1 中仅 $m_a = 100$.
分配系数为 $D_{4c} = D_{3b} = 1/3$, $D_{c1} = D_{c4} = D_{c1} = D_{1c} = D_{1a} = D_{a1} = D_{a2} = D_{2a} = D_{2b} = D_{b2} = D_{b3} = 0.25$;
传递系数均为 0.5 ;
杆件性质系数为 $g_{c4} = g_{b3} = (1/3 \times 1/4 \times 1/2 \times 1/2) = 1/48$, $g_{c1} = g_{a1} = g_{a2} = g_{b2} = 1/64$;
结点性质系数为 $G_c = G_b = 1/[1 - (g_{c4} + g_{c1})] = 1.0378378$, $G_a = 1/[1 - (g_{a1} + g_{a2})] = 1.032258$;
结点性质相关系数为 $G_{abc} = 1/[1 - G_a G_b g_{a2} g_{b2} - G_a G_c g_{a1} g_{c1}] = 1.000523$;
等效不平衡力矩之和

$$\begin{aligned} H_a^* &= m_a^* G_{abc} = m_a G_a G_{abc} = 103.28 \\ H_c^* &= G_c C_{1c} D_{1c} C_{a1} D_{a1} H_a^* = 1.67481 \\ H_b^* &= 1.67481 \end{aligned}$$

由图 4 可求得各杆端弯矩 ,其中和结点 a 相连的各杆端弯矩

$$M_{a1} = M_{a2} = -24.18 \qquad M_{aa'} = M_{aa''} = -25.82$$

e. 图 1 刚架中有 7 个可转动结点 ,仅 $m_c \neq 0$, $m_b \neq 0$ 时的极限公式.对结点 c 的不平衡力矩 m_c ,对结点 b 的不平衡力矩 m_b ,用三结点同时放松的弯矩分配法^[3]列表计算一个循环 ,见图 5.

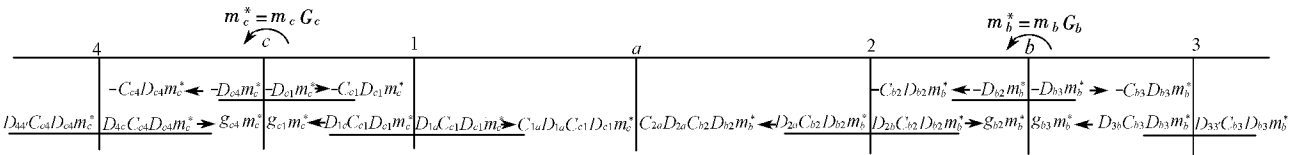


图 5 $m_b m_c$ 作用

Fig.5 Action of m_b and m_c

图 5 中一个循环分 2 个步骤.第一步 ,用刚臂固定结点 a ,同时放松结点 $4, c, 1$,对结点 c 的等效不平衡力矩($m_c^* = m_c G_c$)进行分配传递.第二步 ,用刚臂固定结点 a ,同时放松结点 $2, b, 3$,对结点 b 的等效不平衡力矩($m_b^* = m_b G_b$)进行分配传递.第一步和第二步在结点 a 形成不平衡力矩之和

$$A_a = C_{1a}D_{1a}C_{c1}D_{c1}m_c^* + C_{2a}D_{2a}C_{b2}D_{b2}m_b^* \tag{10}$$

而在其它结点已无不平衡力矩 ,故余下问题已转化为在 a 点作用不平衡力矩 A_a 的问题 ,见 d.

f. 图 1 刚架中有 7 个可转动结点 ,结点不平衡力矩均不为 0 的极限公式.将 $m_4 m_1 m_2 m_3$ 分别在结点 $4, 1, 2, 3$ 按传统弯矩分配法分配一次 ,传递一次 ,使结点 $4, 1, 2, 3$ 上无不平衡力矩 ,而只有结点 c, a, b 上有不平衡力矩的问题 ,此问题上文已讨论.

g. 图 1 刚架中有 4~6 个可转动结点的极限公式.该情况为 7 个可转动结点的特例 ,不详述.

3 结 语

本文给出有 2~7 个可转动结点的弯矩分配传递无限多次的极限公式 ,基本公式为 3 个可转动结点和 7 个可转动结点 2 种情况 ,2 个可转动结点是 3 个可转动结点的特例 ,4~6 个可转动结点是 7 个可转动结点的特例.

极限公式是将解答直接用公式写出来 ,可手算 ,也可电算 . 编程的大部分仅是加减乘除四则运算 ,极为简单 .

参考文献 :

[1] 武汉水利电力学院建筑力学教研室 . 结构力学[M]. 北京 :水利电力出版社 ,1960. 197—206 .
[2] 徐汉忠 . 结构力学中结点不平衡力矩分配传递的极限公式[J]. 河海大学学报 ,1997 ,25(6) :60—64 .
[3] 徐汉忠 ,刘宁 . 四杆封闭结构在任意荷载作用下的精确解[J]. 河海大学学报(自然科学版) ,2001 ,29(5) :106—109 .
[4] 徐汉忠 ,刘宁 ,李海峰 . 竖向荷载作用下高层框架的一种新的计算方法[J]. 河海大学学报(自然科学版) ,2002 ,30(2) :54—57 .
[5] 徐汉忠 ,姚丽章 ,律海燕 . 圆形储液池弯矩分配传递无限次的闭合解[J]. 南京理工大学学报 ,2002 ,26(5) :534—539 .

Limit formula for infinite distribution and transmission of joint unbalanced moment

XU Han-zhong

(College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract :A formula for the limit value of bending moments at bar ends obtained by infinite distribution and transmission of unbalanced moments is derived for the frame with seven or fewer rotatable joints , and corresponding examples are given . The method is convenient for computer and manual calculation , and suitable for calculation of high-rising rigid frames after layer division .

Key words :structural mechanics ; frame structure ; displacement method ; bending moment distribution method ; closed solution