

一种直纹渐变曲面展开的通用算法

高 旭¹ 张 牧²

(1.扬州大学水利与建筑工程学院 江苏 扬州 225009 ; 2.河海大学交通与海洋工程学院 江苏 南京 210098)

摘要 根据微分几何的定理 ,对直纹渐变曲面的形成进行了分析 ,为了实现直纹渐变曲面的自动展开 ,又对曲面上的扭曲四边形的组成元素进行分析 ,利用曲线的参数方程 ,给出了计算扭曲四边形的展开元素长度的具体方法 .为了实现直纹渐变曲面自动展开的算法 ,采用局部坐标系平移和旋转的方法 ,可方便地进行展开元素长度及求交点的计算 ,这一算法适合于一切用解析式表示的曲线形成的直纹渐变曲面的自动展开 .最后 ,通过两个直纹渐变曲面自动展开的实例 ,说明自动展开通用算法的过程 ,并给出了相应的展开图 .

关键词 直纹渐变曲面 ;构成分析 ;展开元素 ;局部坐标系

中图分类号 :TB21 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2003)06-0715-04

直纹渐变曲面在工程中应用广泛 ,若是采用人工图解法绘制其展开图和放样图 ,费时费工 ,效率低 ,精度差 .计算机绘图技术的应用为渐变曲面展开图的绘制开辟了新的途径 .本文以常见的几种直纹渐变曲面为研究对象 ,就它们的展开建立数学方程 ,并给出这类曲面自动展开的通用算法 .

1 直纹渐变曲面的形成与展开分析

如图 1 所示 , L 和 S 为不在同一平面的两根曲线 ,这两根曲线上的各点具有不同方向的切线 ,过这两根曲线可构成一直纹渐变曲面 .

为此 ,需首先找出构成这一渐变曲面的母线 .根据微分几何的定理 ,该直纹渐变曲面是一系列与曲线 L 和 S 都同时相切的切平面 T_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 的包络面 ,渐变曲面的直母线是切平面在某一位置上与 L 和 S 都同时相切的切点 U_i, V_i ($U_i \in L, V_i \in S$) 之间的连线 .由一系列的切平面与 L, S 同时相切 ,即可得到切点 $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_i, V_i, \dots, U_n, V_n$,将这些对应的切点相连 ,即可构成直纹渐变曲面 F .

为建立曲面展开的数学方程 ,取曲面上任一曲面片进行分析 ,如图 2 所示 ,曲面上两根相邻的素线 $U_i V_i, U_{i+1} V_{i+1}$ 和 $\Delta L_i, \Delta S_i$ 构成了一个扭曲四边形 ;用扭曲四边形上的一根对角线 $U_i V_{i+1}$ (或 $V_i U_{i+1}$) 将该四边形划分为两个三角形 .只要将曲线划分得足够细 ,即可用直线段 $\overline{L_i}, \overline{S_i}$ 近似代替曲线的弧段 L_i, S_i ,我们可通过计算得到 $U_i V_i, U_i V_{i+1}, U_{i+1} V_{i+1}$ 和 $\Delta L_i, \Delta S_i$ 的实长 ,从而可画出这两个三角形 .用同样的方法 ,可画出其它扭曲四边形 ;则直纹渐变曲面的展开图可由所有反映实形的三角形依次连接而成 ,从而可在某一平面上画出 .

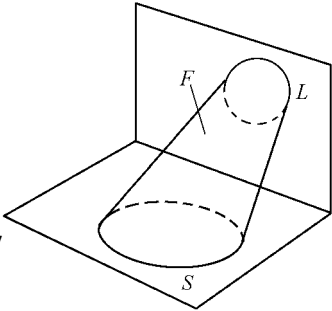


图 1 两平面曲线之间的直纹渐变曲面

Fig.1 Transition curved surface between two plane curves

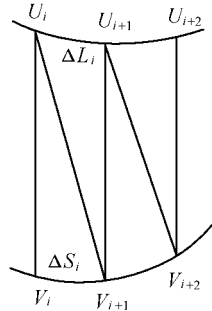


图 2 扭曲四边形的展开分析

Fig.2 Development of a distorted quadrangle

2 计算展开元素长度的数学方程

设曲线 L 和 S 的方程分别为：

$$L = L(x, y, z) \qquad S = S(x, y, z)$$
$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad L = L(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

式中 t 为曲线 L 的参数.

$$S: \begin{cases} x = x(\theta) \\ y = y(\theta) \\ z = z(\theta) \end{cases} \qquad S = S(\theta) = [x(\theta), y(\theta), z(\theta)]$$

式中 θ 为曲线 S 的参数.

曲线 L 上的点 U_i, U_{i+1} 的坐标分别为 $[x(t_i), y(t_i), z(t_i)]$ 和 $[x(t_{i+1}), y(t_{i+1}), z(t_{i+1})]$
曲线 S 上的点 V_i, V_{i+1} 的坐标分别为 $[x(\theta_i), y(\theta_i), z(\theta_i)]$ 和 $[x(\theta_{i+1}), y(\theta_{i+1}), z(\theta_{i+1})]$
则 $\overline{U_i V_i}, \overline{U_i V_{i+1}}, \overline{U_{i+1} V_{i+1}}$ 三线段的实长分别为

$$\overline{U_i V_i} = \sqrt{[x(t_i) - x(\theta_i)]^2 + [y(t_i) - y(\theta_i)]^2 + [z(t_i) - z(\theta_i)]^2}$$
$$\overline{U_i V_{i+1}} = \sqrt{[x(t_i) - x(\theta_{i+1})]^2 + [y(t_i) - y(\theta_{i+1})]^2 + [z(t_i) - z(\theta_{i+1})]^2}$$
$$\overline{U_{i+1} V_{i+1}} = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(\theta_{i+1})]^2 + [y(t_{i+1}) - y(\theta_{i+1})]^2 + [z(t_{i+1}) - z(\theta_{i+1})]^2}$$
$$\Delta L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \qquad \Delta S_i = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

这样,三角形 $U_i V_{i+1} V_i$ 和 $U_i U_{i+1} V_{i+1}$ 各边的实长都可通过上述方程求得.用同样的方法,可求出曲面上一系列三角形各边的长度.

3 采用局部坐标系,实现自动展开的通用算法

设已求得 $U_1 V_1$ 边的长度为 L_1 ,将其置于如图 3 所示的 xOy 坐标系中, V_1 点置于坐标的原点, $U_1 V_1$ 边在 y 轴上,则 U_1 点的坐标为 $(0, L_1)$, V_1 点的坐标为 $(0, 0)$;又求得 $U_2 V_1$ 边的长度为 L_2 , $U_1 V_2$ 边的长度为 L_3 ,分别以 U_1, V_1 为圆心, L_2, L_3 为半径画两个圆,两圆的方程为

$$x^2 + y^2 = L_1^2 \qquad x^2 + (y - L_1)^2 = L_3^2$$

解之得交点 U_2 的 y 坐标：
$$uy_2 = y = (L_1^2 + L_2^2 - L_3^2)/2L_1$$

则
$$ux_2 = x = \pm \sqrt{L_2^2 - y^2}$$

取 y 轴右边的点,则
$$ux_2 = \sqrt{L_2^2 - y^2} = \sqrt{L_2^2 - uy^2}$$

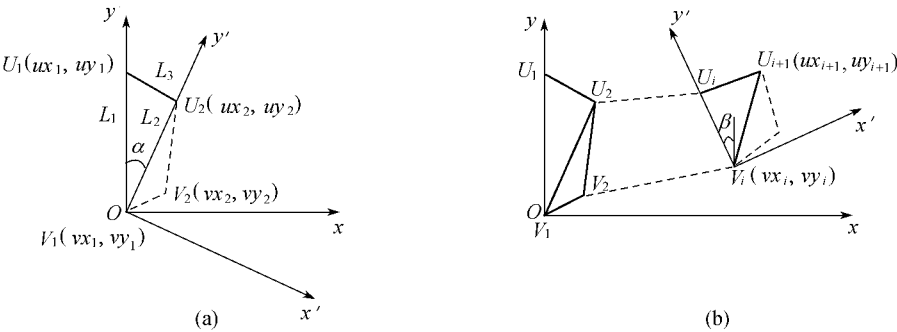


图 3 局部坐标系

Fig.3 Local coordinate system

由此可得点 U_2 的坐标为 $(\sqrt{L_2^2 - uy_2^2} (L_1^2 + L_2^2 - L_3^2)/2L_1)$, 从而画出第一个三角形. 对于第二个三角形, 以 $x'Oy'$ 为新的坐标系, 求 V_2 的算法不变(如图 3(a)所示).

求交点的子函数如下(用 C 语言编写):

Find-----intersec(L_1, L_2, L_3)

float L_1, L_2, L_3 ;

$y = (L_1 * L_1 + L_2 * L_2 - L_3 * L_3)/2L_1$;

$x = \text{sqrt}(L_2 * L_2 - y * y)$;

求得 V_2 在局部坐标系 $x'Oy'$ 中的坐标(vx'_2, vy'_2)后, 还需算出它在 xOy 坐标系中的坐标(vx_2, vy_2), 才能用于作图.

$$(vx_2, vy_2) = (vx'_2, vy'_2) \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

式中 α 角为 y 轴与矢量 $\overline{U_2V_1}$ 的夹角. 由余弦定理: $\cos\alpha = (L_1^2 + L_2^2 - L_3^2)/2L_1L_2$, 可做出第二个三角形. 对于第 $(i-1)+1$ 个三角形($i=2, 3, \dots, n$), 如图 4 所示, 只要将坐标原点移至 V_i 点, 并求出 y 轴与 $\overline{U_iV_i}$ 的夹角 β , 则采用上述算法, 可求得点 U_{i+1} 的坐标. 在整个求解和绘制过程中, 除了局部坐标系的平移和旋转, 求交算法是相同的.

若(ux'_{i+1}, uy'_{i+1})为点 U_{i+1} 在局部坐标系中的坐标, 则 U_{i+1} 在 xOy 坐标系中的坐标为

$$(ux_{i+1}, uy_{i+1}) = (ux'_{i+1}, uy'_{i+1}) \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ vx_i & vy_i & 1 \end{bmatrix}$$

其中 vx_i, vy_i 为 v_i 在 xOy 坐标系中的坐标, 如图 3(b)所示.

4 展开实例

$$\left. \begin{aligned} L: L(t) &= (0, 15 + 3\cos t, 36 + 30\sin t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ S: S(\theta) &= (66 + 60\cos\theta, 60\sin\theta, \rho) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} L: L(t) &= \{50 + 40\cos t [10^4 - (50 + 40\cos t)^2]^{1/2}, 40\sin t\} \\ S: S(\theta) &= \{70 + 30\cos\theta, 300 - [50^2 - (10 + 30\sin\theta)^2]^{1/2}, 100 + 30\sin\theta\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$(0 \leq t, \theta \leq 2\pi)$

方程组(1)所示的直纹渐变曲面如图 1 所示, 其中 L 和 S 分别为互相垂直的两平面上的圆, 其展开后的图形如图 4 所示.

方程组(2)所示的直纹渐变曲面如图 5(a)所示, 其中 L 和 S 分别为两圆柱面上的空间曲线, 其展开后的图形如图 5(b)所示.

直纹渐变曲面展开图自动绘制的程序用 C 语言编写, 实现这一算法的程序较长, 不便在此全部列出, 现将其算法流程简要说明如下: (a)开始, 读入初始给定数据; (b)输入循环次数; (c)依次计算各展开基本单元——三角形各边的边长; (d)采用局部坐标系求交点及判别交点位置; (e)将交点的局部坐标系 $x'O'y'$ 坐标转换为 xOy 坐标; (f)调用绘图子函数绘制展开图, 结束.

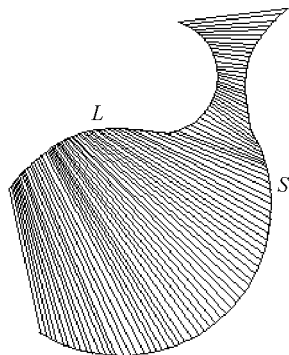


图 4 由图 1 所示直纹渐变曲面的展开图

Fig.4 Development of straight grained transition curved surface shown in Fig.1

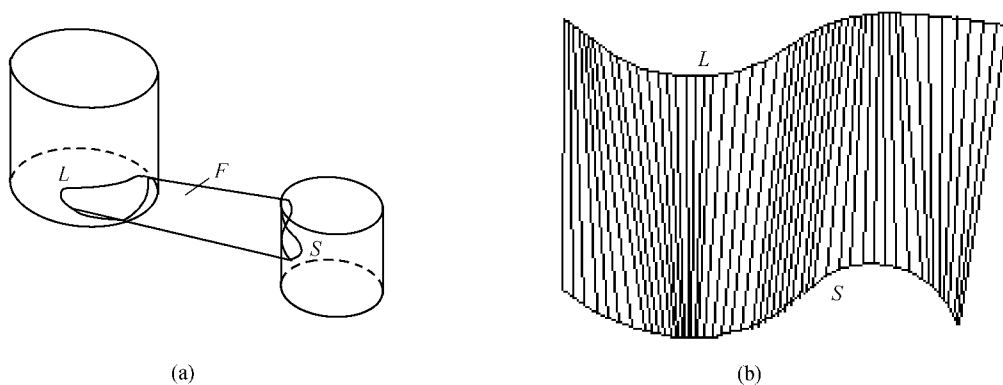


图5 直纹渐变曲面和展开图

Fig.5 Stright grained transition curved surface between two columns and figure of its development

参考文献:

- [1] 孙家广. 计算机图形学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998. 286—289.
 [2] 关履泰. 计算机辅助几何图形设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999. 3—15.
 [3] 廖晓昕. 现代数学手册——经典数学卷[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000. 201—262.

A universal algorithm for development of straight grained transition curved surfaces

GAO Xu¹, ZHANG Mu²

- (1. College of Water Conservancy and Architectural Engineering, Yangzhou Univ., Yangzhou 225009, China;
 2. College of Traffic and Ocean Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: The formation of straight grained transition curved surfaces is analyzed based on the theorem of differential geometry. For realization of the automatic development of the straight grained transition curved surface, an analysis is made of the components of distorted quadrangles on the curve surface, and a specific method is given to calculate the length of developed components of the quadrangles by use of the curve parameter equation. An algorithm for automatic development of straight grained transition curved surface is realized by adoption of the local coordinate translation and rotation, which make it easy to calculate the length of the developed components and derive the intersection points. The algorithm is suitable for the automatic development of the transition curved surface formed of curves expressed by arbitrary analytical functions. Finally, the process of the algorithm is demonstrated by two cases, and corresponding figures of curve surface development are also given.

Key words: straight grained transition curved surface; analysis of components; developed element; local coordinate