

关于椭圆型方程的一类解法

王海鹰,周继东,董祖引

(河海大学理学院应用数学系,江苏 南京 210098)

摘要 阐述了一类椭圆型方程边值问题的解法,利用变分不等方程将其化为线性互补问题作为算法基础,并构造了改进的 Krawczyk 区间算子的迭代公式,这一算法是可以在计算机上得到确认的检验方法.最后给出了算例,数值结果是好的.

关键词 椭圆型方程 变分不等方程 线性互补问题 Krawczyk 区间算子

中图分类号 O221 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2003)06-0719-04

1 椭圆型方程与变分不等方程

偏微分方程在自然科学和工程技术中有很多应用,例如连续介质力学,电磁学,量子力学等方面的数学模型都是一些偏微分方程.椭圆型方程是描述静止的稳定的物理现象,例如不可压缩理想流体无旋流动的速度势以及静电场的电位等都可归结为椭圆型方程.椭圆型方程只是在一些特殊情况下才能求得定解问题的精确解,因此经常要求椭圆型方程数值解.本文给出利用线性互补问题(LCP)的方法求椭圆型方程数值解.而这一方法是基于应用变分不等方程把椭圆型方程化为线性互补问题.

在平面区域 $D \subseteq R^2, \partial D = \Gamma$ 上分别给出椭圆型方程和第三类边界条件,这种情况称为泊松方程的第三类边值问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + u \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \tag{1}$$

而 $\mathbf{n}$ 是 Γ 的外法向量.

现在考察椭圆型变分不等方程,设 $D \subseteq R^2, \partial D = \Gamma$ 为逐段光滑边界,任意 $u, v \in H^1(D)$, 令泛函

$$\varphi(u, v) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma + \int_{\Gamma} u \cdot v dS \qquad (u, v) = \iint_D u \cdot v d\sigma$$

对任意的 $g \in L^2(D) \subseteq H^1(D)$, 定义算子

$$\Phi u = - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = g$$

令
$$K = \left\{ v \mid v \in H^1(D), v \geq 0, \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} + v \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

因为 K 是一个凸闭集,则存在惟一的 $u \in K$, 满足下列变分不等方程^[1]:

$$\varphi(u, v - u) \geq (g, v - u) \qquad \forall v \in K \tag{2}$$

并且变分不等方程(2)的解 u 也是下列问题的解:

$$\Phi u - g \geq 0 \qquad u \geq 0 \qquad (\Phi u - g) u = 0 \tag{3}$$

另一方面利用格林定理变分不等方程(2)的解又是泊松问题(1)的解,其中 $g = -f$. 而式(3)是一种线性互补形式,因此可以利用差分方法把式(1)转化为线性互补问题求解.

2 线性互补问题

工程中、管理学中和经济学中的许多重要问题可以表示成线性互补问题.对于 LCP 的求解已经有了几

种方法^[2],并且利用改进的 Krawczyk 区间算子给出了区间迭代算法以及一个可行的检验方法.线性互补问题定义为:给定 $M \in R^{n \times n}$ 和 $q \in R^n$,求 $x \in R^n$,使得

$$(Mx + q)^T x = 0 \qquad Mx + q \geq 0 \qquad x \geq 0 \tag{4}$$

或者证明这样的 x 不存在.在 LCP 的研究中,常给出一个非线性方程的等价系统:

$$f(x) = 0 \tag{5}$$

其等价性是指: x^* 是式(5)的解,当且仅当 x^* 是式(4)的解.为此人们设计了求解式(4)的许多算法.常用的一个非线性方程的等价公式是 Pang 函数^[2]

$$f(x) = \min(Mx + q, x) = 0 \tag{6}$$

其中 "min" 是按分量取最小. Pang 函数是逐段线性非光滑函数.因此许多找方程零点的方法无法使用.而改进的 Krawczyk 区间算子可以有效地给出一个求解式(6)的算法,这种算法可以在数字计算机上获得验证,保证中心在近似解的多维区间包含一个精确解或者检验出某一多维区间内不包含这个问题的精确解.为了作出 Krawczyk 算子,必须构造函数导数的区间扩张,而 Pang 函数是非光滑函数,因此作出的是广义下的导数区间扩张,称其为斜率区间扩张.

在式(6)中,用 $m_i^T \in R^n$ 表示 M 的第 i 行, $e_i^T \in R^n$ 为第 i 个单位向量, q_i 为 q 的第 i 个分量,定义集合如下:

$$Q_i^+ = \{x | x \in X, (m_i - e_i)^T x + q_i > 0\} \qquad Q_i^- = \{x | x \in X, (m_i - e_i)^T x + q_i < 0\}$$
$$i = 1, 2, \cdots, n$$

对固定 $x \in X$,作下列线性规划问题: $i = 1, 2, \cdots, n$,若 $x \notin Q_i^-$,求

$$\inf (m_i - e_i)^T y + q_i \qquad \text{s.t.} \qquad y \in Q_i^- \tag{7}$$

若 $x \notin Q_i^+$,求

$$\sup (m_i - e_i)^T y + q_i \qquad \text{s.t.} \qquad y \in Q_i^+ \tag{8}$$

设式(7)或(8)的最优解为 y^i ,令

$$\alpha_i = \frac{(m_i - e_i)^T x + q_i}{(m_i - e_i)^T (x - y^i)}$$

作区间值函数

$$H_i(x, X) = \begin{cases} e_i^T & Q_i^- = \emptyset \\ m_i^T & Q_i^+ = \emptyset \\ m_i^T + [\alpha_i, 1](e_i - m_i)^T & x \notin Q_i^-, Q_i^+ \neq \emptyset \\ e_i^T + [\alpha_i, 1](m_i - e_i)^T & x \notin Q_i^+, Q_i^- \neq \emptyset \end{cases} \tag{9}$$

$H_i(x, X)$ 表示区间矩阵 $H(x, X)$ 的第 i 行^[2].

现在给出改进的 Krawczyk 区间算子^[3],斜率区间扩张 $H(x, X)$ 如式(9)定义,并设 A 是一个适当的非奇异矩阵

$$L(x, A, X) = x - Af(x) + (I - AH(x, X))(X - x) \tag{10}$$

其中 f 是 Pang 函数(6), I 为单位矩阵.可以证明下面的引理.

引理^[3] 设 $L(x, A, X)$ 如上所定义,则有(a)如果 $x^* \in X$ 是式(6)的解,则 $x^* \in L(x, A, X), x \in X$.
(b)如果 $L(x, A, X) \cap X = \emptyset$,则在 X 中没有式(6)的解.(c)若存在 $x \in X$ 和非奇异矩阵 A ,使得 $L(x, A, X) \subseteq X$ 则在 X 中必有式(6)的解.

这样构造区间迭代公式

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap L(\bar{x}^{(k)}, A, X^{(k)}) \tag{11}$$

其中 $\bar{x}^{(k)} = m(X^{(k)})$.若 $\bar{x}^{(0)}$ 为初始区间 $X^{(0)}$ 的中心,如果 $G = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}^{(0)})\right)$ 非奇异时,可令 $A = G^{-1}$.区间迭代式(11)可以给出一个宽度足够小的包含式(6)的精确解的多维区间,或者检验出在初始区间中不包含精确解^[2].

3 椭圆型方程第三类边值问题的数值解法

椭圆型方程的第三类边值问题求数值解常用差分方法化为线性方程组求解^[4],而线性方程组一些通常

的解法往往不能达到一定的精度,笔者利用变分不等方程把椭圆型方程的第三类边值问题与线性互补问题建立一种联系,从而提供一类数值方法,这一方法可以给出一个宽度足够小的包含精确解的区间.因此,通过式(3),再利用泊松方程的差分格式,可以把式(1)转化为 LCP 问题,这样一来就化为对 Pang 函数(6)的求解问题.

对泊松方程的第三类边值问题(1),采用下列五点格式^[4],对区域 D 作正方形网格,步长为 h ,设 $x_{i \pm 1} = x_i \pm h, y_{i \pm 1} = y_i \pm h; u_{ij} = u(x_i, y_j), f_{ij} = f(x_i, y_j), (\Delta u)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} = f_{ij}$. 并设 u_{ij} 的近似值为 $\tilde{u}_{ij}$,则 $\tilde{u}_{ij}$ 满足的差分方程为

$$R_{ij} = \frac{1}{h^2}(\tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j-1} - 4\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1}) = f_{ij}$$

(12)

当 u 的各四阶偏导数有界,即存在 $L > 0$,使得 $\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^s \partial y^t}\right| \leq L$,其中 $s + t = 4, 0 \leq s, t \leq 4$.

则式(12)满足: $\left|R_{ij} - f_{ij}\right| \leq \frac{Lh^2}{6}$. 对边界条件的处理见文献[4]. 这样可得到有 n 个未知数, n 个方程的线性方程组. 若令

$$S_{ij} = \frac{1}{h^2}(-1, -1, 4, -1, -1)^T, T_{ij} = (\tilde{u}_{i-1,j}, \tilde{u}_{i,j-1}, \tilde{u}_{ij}, \tilde{u}_{i+1,j}, \tilde{u}_{i,j+1})^T$$

故当 h 充分小时,则式(12)为 $(\Delta u)_{ij} - f_{ij} \approx -S_{ij}^T T_{ij} - f_{ij}$ (13)

由式(3),得 $-(\Delta u)_{ij} + f_{ij} \geq 0 \quad u_{ij} \geq 0 \quad (-(\Delta u)_{ij} + f_{ij})u_{ij} = 0$

再结合式(13),得 $S_{ij}^T \cdot T_{ij} + f_{ij} \geq 0 \quad T_{ij} \geq 0 \quad (S_{ij}^T \cdot T_{ij} + f_{ij})\tilde{u}_{ij} = 0$ (14)

由式(14)将 i, j 重新排序可以得到与之等价的 LCP 问题:

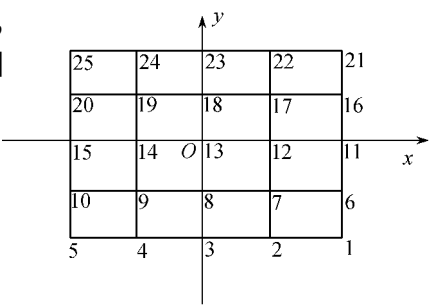
$$M\bar{u} + q \geq 0 \quad \bar{u} \geq 0 \quad (M\bar{u} + q)^T \bar{u} = 0$$

从式(14)可知 M 的主对角线上的元素全为正,其它元素是非正的对角占优矩阵, q 的分量当对应的是内结点时,为 f 在该结点的函数值乘以 h^2 ,当对应的是边界情况时,取为零.

在具体运算时,因为 $\bar{u} \geq 0$,取足够大的 C ,可设初始区间 $X^{(0)}$ 的每一分量均为 $[0, C]$,利用区间算子迭代公式(11),可求出泊松方程的第三类边值问题(1)的近似解 $\bar{u}^* \in X^{(0)}$,或者可检验出 $X^{(0)}$ 中不包含(1)的解.

例 设 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, Γ 是 D 的边界曲线,求下面泊松方程的第三边值问题的解,取步长 $h = 0.5$. 结点的排序如图 1 所示.

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u\right)\Big|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



其中 n 是 Γ 的外法向量.

解 若取初始区间 $X^{(0)}$ 的每一分量均为 $[0, 1]$,由 5 点格式可得一近似的线性方程组:

$$-M\bar{u} + q = 0$$

其中 $q = -(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0)^T$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & & & \\ M_3 & M_4 & M_5 & & \\ & M_3 & M_4 & M_5 & \\ & & M_3 & M_4 & M_5 \\ & & & M_2 & M_1 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ -\sqrt{2} & 1 + 2\sqrt{2} & & & \end{pmatrix}$$

图 1 网格划分

Fig.1 Grid partition

$$M_2 = - \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = - \begin{pmatrix} 00000 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00000 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

因此 Pang 函数为 $f(\bar{u}) = \min(M\bar{u} + q, \bar{u})$, $A^{-1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}^{(0)})\right)$ 非奇异. 经计算得 Krawczyk 算子和区间迭代公式:

$$L(\bar{x}, A, X) = \bar{x} - Af(x) + (I - AH(X))(X - \bar{x})$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap L(\bar{x}^{(k)}, A, X^{(k)})$$

经运算得一包含近似解的区间见表 1.

表 1 计算结果
Table 1 Calculated result

结点	解的区间	结点	解的区间	结点	解的区间	结点	解的区间	结点	解的区间
1	[0.267 6,0.268 6]	6	[0.362 2,0.363 4]	11	[0.399 8,0.400 7]	16	[0.362 3,0.363 0]	21	[0.267 6,0.268 2]
2	[0.362 2,0.363 4]	7	[0.543 4,0.544 8]	12	[0.599 6,0.601 0]	17	[0.543 5,0.544 5]	22	[0.362 3,0.363 0]
3	[0.399 7,0.400 9]	8	[0.599 6,0.601 1]	13	[0.662 1,0.663 5]	18	[0.599 7,0.600 8]	23	[0.399 8,0.400 6]
4	[0.362 2,0.363 4]	9	[0.543 4,0.544 7]	14	[0.599 7,0.600 9]	19	[0.543 5,0.544 5]	24	[0.362 3,0.363 0]
5	[0.267 6,0.268 5]	10	[0.362 2,0.363 2]	15	[0.399 8,0.400 6]	20	[0.362 3,0.363 0]	25	[0.267 6,0.268 3]

取其中点: $\bar{u}^* = (0.268\ 1, 0.362\ 3, 0.400\ 3, 0.362\ 8, 0.268\ 1, 0.362\ 8, 0.544\ 1, 0.600\ 3, 0.544\ 1, 0.362\ 7, 0.400\ 2, 0.600\ 3, 0.662\ 8, 0.600\ 3, 0.400\ 2, 0.362\ 7, 0.544\ 0, 0.600\ 3, 0.544\ 0, 0.362\ 6, 0.267\ 9, 0.362\ 7, 0.400\ 2, 0.362\ 6, 0.267\ 9)^T$. 则 $\bar{u}^*$ 满足线性方程组 $-M\bar{u} + q = 0$, 其精度可达 0.5×10^{-3} , 因此也就是椭圆型方程 (15) 在给定的 25 个结点处的近似解.

本例中有 25 个结点为 25 维的情况, 在具体运算时, 采用了降维算法. 总体上算法运作良好, 然而因维数较高计算时间还是较长的, 关于这方面的改进是进一步研究的部分.

参考文献:

[1] 王耀东. 变分不等方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987. 4—29.
[2] ALEFELD G, CHEN X, POTRA F. Numerical validation of solutions of linear complementarity problems[J]. Numer Math, 1999, 83: 1—23.
[3] 王海鹰, 刘蕴华, 张乃良. 解非线性方程组的一类 Krawczyk-Moore 算法[J]. 河海大学学报, 1992, 20(6): 55—62.
[4] 高应才. 数学物理方程及其数值解法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983. 166—194.

A solution to elliptic equation

WANG Hai-ying, ZHOU Ji-dong, DONG Zu-yin
(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract The enclosure method is proposed to solve the boundary value problem of the elliptic equation. In this method, the boundary value problem is converted into the linear complementarity problem with the aid of the variational inequality, and an iterative algorithm of the Krawczyk interval operator is developed. The algorithm can be implemented on the computer, and the numerical result of the method is valid.

Key words elliptic equation; variational inequality; linear complementarity problem; Krawczyk interval operator