

长度分形维的建立及其在工程检测中的应用

曹茂森¹,任青文¹,李 妮²

(1.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098 ; 2.山东农业大学水利土木学院,山东 泰安 271000)

摘要 :以普适模型 FBM 为工程背景 ,对 Katz 波形分形维计算方法的缺陷进行分析 .以超立方体作为覆盖单元 ,从 Hausdorff 维和分配维理论出发 ,在拓扑映射技术下 ,提出了振动波形长度分形维的定义和计算公式 .对其数学严密性及工程适用性进行分析 ,说明其具有物理概念明晰、简单易行、精确度高等优点 .基于长度分形维的分形动力学分析能力 ,建立了工程缺陷分形检测系统 ,实例证明该系统对缺陷反应敏感、精度高 ,噪声免疫力强 ,有较好的实用价值 .

关键词 :分形维 ;Katz 法 ;长度分形维 ;地下连续墙 ;缺陷检测 ;分数布朗运动

中图分类号 :TU93 ;TU317 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2004)01-0051-04

20 世纪八九十年代以来 ,分形理论作为一种描述几何空间的新方法得到了迅速发展 .目前 ,它已广泛渗透到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域^[1,2] ,并与混沌、孤立子并称为非线性科学的三大支柱 ,成为 21 世纪最活跃的科学前沿领域 .关于分形 ,1986 年 Mandelbrot 给出了一个实用的定义 ,即组成部分以某种方式与整体相似的集合 .严格遵循自相似的分形体称为“有规分形” ,仅在统计意义下自相似的分形体称为“无规分形” .自然界存在的分形体多为无规分形^[3] .分形维数(fractal dimension)是分形理论的基本概念 ,它从分形动力学角度测度分形体对空间的填充能力及其复杂性 ,已成功地应用于工程、生命科学、模式识别等领域^[4] .以覆盖为基础的 Hausdorff 维是第 1 个出现的且是具有最严谨数学意义的分维数概念 ;分配维(D_D , divider dimension)代表了一类以“尺度 ϵ 对分形体进行度量”的指导思想而定义的分形维 .对于工程中常见的振动波形等一般平面曲线 ,分形维计算方法主要有盒维数(D_B)、信息维(D_I)、关联维(D_C)、分配维、赫斯特指数法(hurst exponent)、谱分析法、Katz 法及多重分形谱等 .其中 $D_B \geq D_I \geq D_C$,Katz 法由于计算简单 ,在工程中被较多使用^[5,6] ,但该方法也存在诸多缺陷 .本文在对 Katz 法的缺陷进行分析的基础上 ,针对振动波形的前向性特点 ,从 Hausdorff 维和分配维出发 ,提出了一种新的物理概念明确、简单易行的分形维计算方法——长度分形维 ,并将其用于工程缺陷检测中 ,实例分析验证了其有效性和可行性 .

1 Katz 方法的缺陷分析

1.1 Katz 方法简介

波形的分形维被简单地定义为 $D = \ln L / \ln d$, $d = \max(\text{distance}(1, i))$,即第 1 样本点与小于 i 的样本点之间的最大距离 , L 为曲线测量长度 .由于 D 的大小受度量单位的影响较大 ,Katz 通过数学变换对其进行修正 ,设样本点之间的平均曲线长度为 a , $L = na$ (n 是长度为 a 的曲线段数) ,Katz 分形维计算公式为

$$D_K = \frac{\ln L}{\ln d} = \frac{\ln(L/a)}{\ln(d/a)} = \frac{\ln(L/a)}{\ln((d/L) \cdot (L/a))} = \frac{\ln(n)}{\ln(d/L) + \ln(n)} \quad (1)$$

1.2 Katz 方法缺陷分析

文献[7]阐述了 Katz 方法的一些缺陷 ,这里对其作进一步分析 .

1.2.1 数学意义上的缺陷

首先 ,对于一个样本 ,当 $d/L = c$ (c 为常数) ,且 $n \rightarrow \infty$ 时 , $D_K = 1$;再者 ,对于多个样本 ,当 $d/L = u$ (u 为常数) ,且 n 相同时 ,则有 $D_K = v$ (v 为常数) ,而满足此条件的一簇特性完全不同的曲线是容易构造的 .因此

收稿日期 2003-04-28
基金项目 水利部科技创新基金资助项目(SCX2000-56)
作者简介 曹茂森(1971 —) ,男 ,山东淄博人 ,讲师 ,博士研究生 ,主要从事土木工程健康诊断技术研究 .

从严格数学意义上, D_K 不具备刻画分析维数的能力.

1.2.2 工程适用上的不足

广义的分数布朗运动 FBM(Fractional Brown Motion)是自然界中具有一定普适性的数学模型^[8],在地理、生命、工程、化学等多个学科中得到广泛应用,下面用它作为背景模型对 Katz 方法进行工程适用上的检验.用赫斯特指数法建立一 FBM(赫斯特指数为 0.5)数值模型,采样点为 1500 个,如图 1 所示.图 2、图 3 分别为 d/L 及 D_K 值随模型增长的变化曲线.采样点数大于 500 后, d/L 值几乎稳定于区间 $[0.9982 \quad 1.0015]$ 之内,相应的 D_K 几乎稳定于区间 $[0.9995 \quad 1.0003]$ 之内,而该 FBM 模型理论分维数 $D = 2 - 0.5 = 1.5$.这说明对于 FBM 这一背景模型, Katz 方法在样本点较少的情况下即趋向于 1,明显失去敏感性,因此其不具备分形维计算能力.究其原因是没有严格的数学理论作为基础所致.

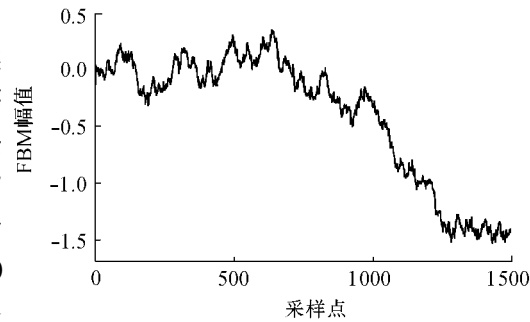


图 1 FBM 模型示意图(赫斯特指数为 0.5)
Fig.1 FBM model(hurstexp = 0.5)

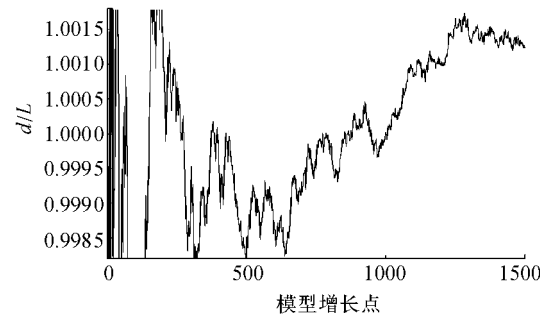


图 2 d/L 随模型增长变化曲线
Fig.2 Variation of d/L with growth of model

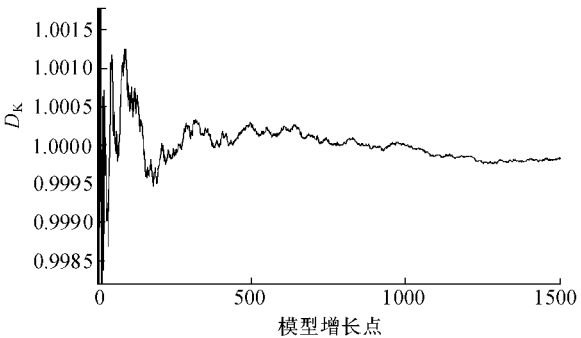


图 3 D_K 模型增长变化曲线
Fig.3 Variation of D_K with growth of model

2 长度分形维

长度分形维是针对工程中振动波形的前向性,即时间方向上的一致性提出的.

2.1 拓扑映射^[7]

设 $A = \{a | a = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ 为一振动波形采样,其中 x_i 为时间采样点, y_i 为振动幅值, N 为采样点数.按式(2)进行拓扑映射: $A \rightarrow M$, M 为单位平面的一个子集: $M = \{b | b = (x_i^*, y_i^*), i = 1, 2, \dots, N\}$

$$x_i^* = \frac{x_i}{x_N} \qquad y_i^* = \frac{y_i - \min V_i}{\max V_i - \min V_i} \tag{2}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$; $V_i = \{y_1, y_2, \dots, y_i\}$.式(2)线性变换不改变集合的拓扑结构,因此 A, M 维数相等.下面从分析 M 的维数入手进行 A 的分形维数研究.

2.2 计算公式及定义

以超立方体为技术关键^[8],从 Hausdorff 维和分配维理论出发,给出振动波形长度分形维计算公式和定义.

2.2.1 Hausdorff 维

Hausdorff 维的计算过程是用边长为 ϵ 、维数等于分形体拓扑维的超立方体对分形体进行覆盖(覆盖单元统一称为超立方体), $N(\epsilon)$ 为覆盖所用的边长为 ϵ 的超立方体数. Hausdorff 维定义为

$$D_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} \right) \tag{3}$$

其中,测量平面曲线时可用单元盒作为超立方体,此时式(3)表示盒维数.

2.2.2 分配维

分配维数是用结构步测技术(structured walk technique)计算的,基本过程是用双脚规对分形曲线进行度量,脚距 ϵ 即度量尺子,量得的曲线长度 $L = (N - 1)\epsilon$, N 为规脚与曲线交点数.分配维定义为

$$D_D = 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L}{\ln \epsilon} \tag{4}$$

2.2.3 长度分形维

对于具有前向性的工程振动波形,用一维长度线段作为超立方体(或尺子)对振动波形进行覆盖(或度量).集合 M 中,设振动波形长度为 L ,当取超立方体边长为 ϵ ,则覆盖单元数为 L/ϵ ,取 $\epsilon = 1/N'$ ($N' = N - 1$),由式(3)得

$$D_L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln \epsilon} \right) = \lim_{N' \rightarrow \infty} \left(- \frac{\ln(L/N'^{-1})}{\ln N'^{-1}} \right) = 1 + \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\ln L}{\ln N'} \tag{5}$$

当取尺子长度 $\epsilon = 1/N'$ ($N' = N - 1$)时,由式(4)得

$$D_L = 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L}{\ln \epsilon} = 1 + \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\ln L}{\ln N'} \tag{6}$$

可见式(5)和式(6)的结果是一致的.因为在覆盖或度量过程中,单元采用的是具有一维长度的线段,所以得到的分形维称为长度分形维.在集合 M 中,对于有限样本点的振动波形,下式成立:

$$D_L = 1 + \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{\ln L}{\ln N'} = 1 + \frac{\ln L}{\ln N'} \tag{7}$$

2.3 数学严密性及工程适用性

2.3.1 数学严密性

对于集合 M ,考虑其两个极限状态.首先,在单位平面内 $N' \rightarrow \infty$, $\Delta y_i \rightarrow 1$,波形曲线的填充能力趋近于覆盖整个单位平面;其次, $N' \rightarrow \infty$, $\Delta y_i \rightarrow 0$,波形曲线的填充能力趋近于一条直线.这两种情况是长度分形维的上下确界,其极限计算如下:

$$\lim_{\substack{N' \rightarrow \infty \\ \Delta y_i \rightarrow 1}} \sup(D_L) = 1 + \lim_{\substack{N' \rightarrow \infty \\ \Delta y_i \rightarrow 1}} \frac{\ln L}{\ln N'} = 1 + \lim_{\substack{N' \rightarrow \infty \\ \Delta y_i \rightarrow 1}} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{N'} \sqrt{(N'^{-1})^2 + (\Delta y_i)^2} \right)}{\ln N'} = 2 \tag{8}$$

$$\lim_{\substack{N' \rightarrow \infty \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \inf(D_L) = 1 + \lim_{\substack{N' \rightarrow \infty \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \frac{\ln L}{\ln N'} = 1 + \lim_{\substack{N' \rightarrow \infty \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{N'} \sqrt{(N'^{-1})^2 + (\Delta y_i)^2} \right)}{\ln N'} = 1 \tag{9}$$

因此,长度分形维数 $1 \leq D_L \leq 2$,符合平面曲线的空间几何性质,具有数学意义上的严密性.

2.3.2 工程适用性

对第1部分中的 FBM 模型,用 Matlab 编制长度分形维计算程序,计算结果如图4所示.可见 D_L 在采样点大于250之后,其值位于区间[1.38 1.47]之内,可以作为理论值1.5的近似.通过多个理论模型试验,并与关联维、多重分形谱($q = 2$)进行比较,认为长度分形维具有逼近理论值速度较快、精度较高、适合于少数据点集合等优点,这对于工程应用是十分有利的.

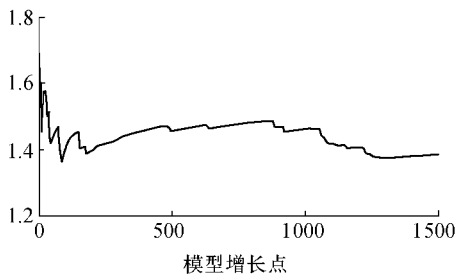


图4 D_L 随模型增长变化曲线

Fig.4 Variation of D_L with growth of model

3 工程检测应用

3.1 基本方法

土木工程的缺陷检测一般采用振动法.待检工程可以看做一个非线性动力系统,在激振输入下,输出的载有丰富介质信息的振动波形表征了系统的动力状态空间,分析振动波形进行缺陷辨识是最常用的方法.一方面,长度分形维从分形动力学角度综合了频率、振幅、相位的多种信息,刻画了系统的动力行为,对介质缺陷在振动波形上反映出的突变等异常现象十分敏感,表现为维值的跳跃,由此可以预报缺陷;另一方面,长度分形维对于具有全局性的背景噪声表现出较强的免疫能力,噪声水平的不同仅反映在维值整体水平的上下平移上,而不影响长度分形维对具有局部性的有效信息的表征.长度分形维对有效信息相对变化的敏感反应是缺陷识别的依据,其对缺陷的敏感性和对噪声的免疫能力,使其对于缺陷识别具有较强的鲁棒性.

3.2 工程实例

1998年国内发生大洪水以来,地下连续墙被大量兴建,用于防渗和加固.隐蔽性特征使其健康诊断十分必要.这里基于长度分形维理论,研制了工程缺陷分形检测系统,从分形动力学角度对振动检测波进行分析,

通过分形维的跳跃进行缺陷预警.图5为某一混凝土地下连续墙检测的振动反射波实测信号,图6为分形检测系统产生的长度分形维检测曲线.图6中分形检测系统对振动波形的不同动力状态进行了明晰的表达和划分.在125和386采样点处分维值突降,预报了该时刻动力状态的突变,可判断是裂缝或孔洞等缺陷所致.经工程开挖验证,对应125样本点,在深度为1.9m处发现有宽20cm的夹泥横向不通透裂缝,对应386样本点,在深度为5.8m处存在半径约40cm的空洞.由此可见,分形检测系统较准确地捕获了结构构造的变化特征,实现了缺陷的准确定位.与传统的信号分析技术相比,具有简捷、准确的优势,并容易实现自动、实时检测.

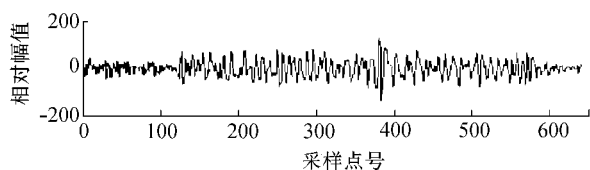
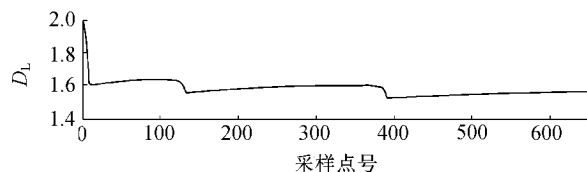


图5 混凝土地下连续墙反射波

Fig.5 Reflected wave from underground continuous concrete wall

图6 D_L 检测曲线Fig.6 D_L detecting curve

4 结 语

- 在 Hausdorff 维和分配维的基础上,提出了长度分形维定义和计算公式.
- 实例证明长度分形维应用于工程缺陷检测是有效的,表明了分形理论在工程应用上的可行性.
- 探索分形理论与实际应用的结合是一个具有潜力的研究领域.

参考文献:

- [1] 张济忠.分形[M].北京:清华大学出版社,1995.1—12.
- [2] 姜建东,王晓升,屈梁生.分形几何在回转机械信号振动分析中的应用[J].中国机械工程,1998(9):39—41.
- [3] 张朝晖,黄惟一.振动波形的分形判别和特征提取[J].东南大学学报(自然科学版),1999,29(4):26—29.
- [4] PINCUS S M, GLADSTONS I M, EHRENKRANZ R A. A regularity statistic for medical data analysis[J]. Clin Monit, 1991(7):335—345.
- [5] KATZ M G. Fractals and the analysis of waveform[J]. Comput Biol Med, 1988, 18(3):145—156.
- [6] HIGUCHI T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory[J]. Physica D, 1998, 31:277—283.
- [7] SEVCIK C. A procedure to estimate the fractal dimension of waveforms[J]. Complexity International, 1998(5):17—21.
- [8] 石博强,申焱华.机械故障检测的分形方法[M].北京:冶金工业出版社,2001.57—91.

Development of length fractal dimension and its application to engineering detection

CAO Mao-sen¹, REN Qing-wen¹, LI Ni²

(1. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. College of Hydraulic and Civil Engineering, Shandong Agriculture Univ., Taian 271000, China)

Abstract: Against the engineering background of the universal FBM model, the defects of Katz's method for calculating the length fractal dimension (D_L) of waveform are investigated. Then, by adoption of supercubes as covering cells and on the basis of the theoretical of the Hausdorff dimension and Divider dimension, the definition of the wavelength fractal dimension and its calculating formula are presented based on the technique of topologic mapping. By study of the strictness and applicability of the formula, some merits of the method are validated, including the clear concept, easy operation, and high precision. According to the dynamics analysis capacity of D_L , a fractal defect detection system is developed. Practice shows that the system is of high sensitivity to defects, high precision of calculation, and high immunity to noise, so the method is of high value of application.

Key words: fractal dimension; Katz's method; length fractal dimension; underground continuous wall; defect detection; Fractional Brown Motion