

改进的拱坝等效应力分析方法

李同春¹, 章杭惠²

(1. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 水利部太湖流域管理局, 上海 200434)

摘要 对有限元内力法求解拱坝等效应力分析进行了进一步改进, 假定拱、梁方向上的正、剪应力在拱、梁截面上的面单元内呈双线性分布, 从而导出根据截面约束内力求解等效节点应力的公式, 并在此基础上导出拱梁向应力为直线分布时的上、下游面等效应力的求解方程和主应力求解公式。对典型的圆筒拱坝用本文方法进行应力分析, 得出的拱及梁向应力结果与试载法分析结果基本一致, 表明用本文分析方法得出的应力结果可以按现行的拱坝设计规范规定的应力标准评价拱坝坝体安全度。

关键词 拱坝; 等效应力; 有限元内力法; 拱向应力; 梁向应力

中图分类号 TV31 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2004)01-0104-04

拱坝应力分析主要采用多拱梁法和有限元法, 但同一拱坝用不同多拱梁法程序计算的结果并不一致, 尤其是拉应力相差较多。有限元法具有较强的计算功能, 不但可以比较合理地考虑拱坝的整体作用, 还能够进行各种复杂条件下拱坝的应力分析。但有限元应力分析中存在着坝踵、坝趾的应力集中效应, 这给应力评价及确定控制应力带来困难。

傅作新教授^[1]1991 年提出的有限元等效应力法是基于有限元法的分析结果, 将有限元所求得的应力合成为截面内力, 然后求出对应的线性化应力。该方法为将有限元分析结果规范化提出了一种思路, 但该方法截面内力是拟合出来的, 不能精确地满足内力平衡条件。此外, 该法要求沿径向网格必须布置 3 层以上单元格才能求得结果。

笔者在文献 [2] 中提出的基于有限元内力法的等效应力算法首先按常规方法建立拱坝及地基在水压力、自重等荷载作用下的有限元平衡方程, 求解结点位移和单元应力, 然后将坝体分解为拱系和梁系, 根据拱和梁的内力平衡条件求解指定截面上的约束内力。假定拱向节点应力沿垂直方向, 梁向应力沿左、右岸方向在其节点控制范围内均匀分布, 上、下游方向呈直线分布, 则可根据节点约束内力求得相应控制范围内的内力(弯矩、轴力、剪力等)和坝体内任一点的等效应力。上述关于拱梁向应力分布在其控制范围内沿垂直或左右岸方向均匀分布的假定欠妥当。同时由于每个节点控制范围不同, 导致应力分析工作量较大。本文提出的改进拱坝等效应力分析方法假定拱梁方向上的正、剪应力在拱、梁截面上的面单元内呈双线性分布, 根据静力平衡原理导出了以节点应力为未知量、截面约束内力为右端项的平衡方程。在此基础上, 进一步导出了拱、梁向应力沿拱坝厚度方向为直线分布时的上、下游面等效应力的求解方程和主应力求解公式。

1 基本原理

1.1 用有限元法求解给定截面的内力^[2]

对一给定结构体系, 施加相应的约束边界条件后的有限元方程为

$$K\delta = F \quad (1)$$

式中: K ——结构刚度矩阵; δ ——未知节点位移向量; F ——荷载列阵。

对某一结构系统, 若用给定的截面 π 将结构分为 I 和 II 两个子结构, 并对这两个子结构在该指定截面上施加一组大小相等、方向相反的约束内力, 则可建立与方程(1)完全等价的另一组方程:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ic} \\ k_{ci} & k_{cc} \end{bmatrix}_{I,II} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_c \end{bmatrix}_{I,II} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_c + f_c \end{bmatrix}_{I,II} \tag{2}$$

式中： c ——截面 π 上的节点； i ——非 π 截面上的节点； F_i ——非 π 截面上的节点荷载向量； F_c —— π 面上节点荷载向量； $(f_c)_I$ 、 $(f_c)_{II}$ —— π 截面上 I、II 两子结构间的约束内力，有

$$(f_c)_I + (f_c)_{II} = 0 \tag{3}$$

由于方程 (1) 和 (2) 完全等价，则由方程 (1) 解出节点位移后，代入方程 (2) 就可直接求解出给定截面 π 上的约束内力，其表达式为

$$\begin{aligned} (f_c)_I &= -(f_c)_{II} = (k_{ci})_I (\delta_i)_I + (k_{cc})_I (\delta_c)_I - (F_c)_I = \\ &= (F_c)_{II} - (k_{ci})_{II} (\delta_i)_{II} - (k_{cc})_{II} (\delta_c)_{II} \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) 中的右端项可按 I 或 II 中的所有单元循环求解，然后按自由度进行叠加。由于有限元中位移采用的是分片插值函数，因此 π 截面上的约束内力只与 I 或 II 子结构中所有包含 π 截面上的节点单元有关。故而在实际求解时只需对 I 或 II 子结构中所有包含 π 截面上节点的单元进行循环即可。

1.2 由截面约束内力求解节点等效应力

设 π 截面上的节点数为 mp ， π 截面上的面单元数为 me ，单元节点数为 m 。假定每个节点在 xyz 坐标系下 π 截面上的等效应力分量为 $S_i = \{SX_i \quad SY_i \quad SZ_i\}^T$ ，同时假定每个面单元内任意一点的应力由节点的应力分量通过单元形函数插值得而，即

$$SX = \sum_{i=1}^m N_i SX_i \qquad SY = \sum_{i=1}^m N_i SY_i \qquad SZ = \sum_{i=1}^m N_i SZ_i$$

则根据静力平衡原理有

$$HS = F \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} H &= \sum_{e=1}^{me} H_e \qquad H_e = \iint N^T N d\Omega_e \\ S &= \{SX_1 \quad SY_1 \quad SZ_1 \quad SX_2 \quad SY_2 \quad SZ_2 \quad \dots \quad SX_{mp} \quad SY_{mp} \quad SZ_{mp}\} \\ F &= \{FX_1 \quad FY_1 \quad FZ_1 \quad FX_2 \quad FY_2 \quad FZ_2 \quad \dots \quad FX_{mp} \quad FY_{mp} \quad FZ_{mp}\} \end{aligned}$$

式中 N 为单元形函数矩阵。由于矩阵 F 、 H 均已知，因此由上式可解出 S 。

对于由 π 截面分离出来的子结构 I (或 II)，子结构 II (或 I) 通过 π 截面施加反力，该反力若转换成等效应力，则可理解为沿截面法线 (ζ) 的正应力和截面内的两个相互正交方向 (ξ, η) 的剪应力，任意一节点的应力分量可表示为 $\sigma_{Li} = \{\sigma_{\zeta\zeta} \quad \tau_{\zeta\xi} \quad \tau_{\zeta\eta}\}^T$ ，则由投影可得 σ_{Li} 与 S 之间的转换关系，即

$$\sigma_{Li} = R_i S_i$$

其中

$$R_i = \begin{bmatrix} l_\zeta & m_\zeta & n_\zeta \\ l_\xi & m_\xi & n_\xi \\ l_\eta & m_\eta & n_\eta \end{bmatrix}$$

式中 l_ξ, m_ξ, n_ξ 分别为局部坐标轴 ξ 与整体坐标轴之间的方向余弦，其余类似。

按照多拱梁法中的应力假定^[3]，拱向正应力 $\sigma_{\xi\xi}$ 、梁向正应力 $\sigma_{\zeta\zeta}$ 和剪应力 $\tau_{\zeta\xi} = \tau_{\xi\zeta}$ 沿拱坝厚度按直线分布。这样，由微分体平衡条件，剪应力 $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ 、 $\tau_{\eta\zeta} = \tau_{\zeta\eta}$ 将呈抛物线分布，正应力 $\sigma_{\eta\eta}$ 呈三次曲线分布。为此，对沿拱坝厚度按直线分布的应力分量，当坝体沿厚度布置的单元数大于 1 时需对方程进行适当修正。假定沿径向单元数为 r_e 个，沿径向线上节点数为 $r_e + 1$ 个，设某径向线上的上、下游面上节点的应力值为 S_u 和 S_d ，则其线上任一点的应力值可表示为

$$S_i = S_u + \frac{r_i}{d} (S_u - S_d)$$

式中： d ——上、下面两点之间的距离； r_i ——计算点至上游面的距离。

经过上述处理后 S 可变为 $S = RS'$ ， S' 中只包含上、下面节点应力分量。式 (5) 可写成 $H' S' = F'$ ，其中

$H' = R^T H R, F' = R^T F.$

1.3 拱坝上、下游面主应力求解

在相互正交的局部坐标系 $\xi\eta\zeta$ 下,应力张量为

$$\sigma_L = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \tau_{\xi\eta} & \tau_{\xi\zeta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_{\eta\eta} & \tau_{\eta\zeta} \\ \tau_{\xi\zeta} & \tau_{\eta\zeta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$$

$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\zeta\zeta} = \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ 已经由上节应力求解方法解出,其余的应力可根据上、下游应力边界条件求得. 这里以上游面为例建立求解方法.

设拱坝上游面上任一点在 $\xi\eta\zeta$ 坐标系下的法线方向余弦为 $\{l' \quad m' \quad n'\}$,则在上游面沿法线方向作用水压力 p 下,由于该面上的剪应力为零,可得

$$\begin{aligned} l'\sigma_{\xi\xi} + m'\tau_{\xi\eta} + n'\tau_{\xi\zeta} &= -l'p \\ l'\tau_{\xi\eta} + m'\sigma_{\eta\eta} + n'\tau_{\eta\zeta} &= -m'p \\ l'\tau_{\xi\zeta} + m'\tau_{\eta\zeta} + n'\sigma_{\zeta\zeta} &= -n'p \end{aligned}$$

由上式可求解得出 $\sigma_{\eta\eta} = \tau_{\xi\eta} = \tau_{\xi\zeta}$ 和 $\tau_{\eta\zeta} = \tau_{\eta\xi}$. 当 9 个应力分量全部解出后,可由一般的主应力方法求解得出上游面任一点的主应力.

2 算 例

刚性地基上的对称圆筒拱坝^[4] 坝高 30 m,坝厚 3 m,坝中面半径 44.75 m,坝体容重 24 kN/m³,弹性模量为 2.0×10^4 MPa,泊松比取 0.15,坝基弹性模量取 10.0×10^6 MPa,近似模拟其刚性,只考虑满库水荷载作用. 该拱坝的计算简图见图 1,有限元计算模型见图 2.

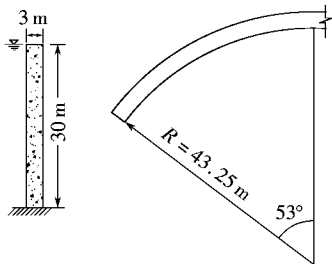


图 1 计算简图

Fig.1 Scheme of calculation

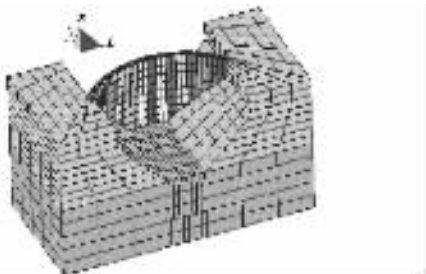


图 2 有限元计算模型

Fig.2 Finite element calculation model

通过计算,由改进的拱坝等效力分析方法计算得到的结果见图 3、图 4,与垦务局试载法、薄板有限元法的计算结果拟合较好,而且由 3 种计算方法得到的最大拉、压应力值相差也不大. 由图 3 还可以发现,不同计算方法得出的拱冠下游面拱向应力结果相差相对较大,但总体趋势相同. 由于该处拉、压应力绝对值相对较小,所以一般不作重点考虑.

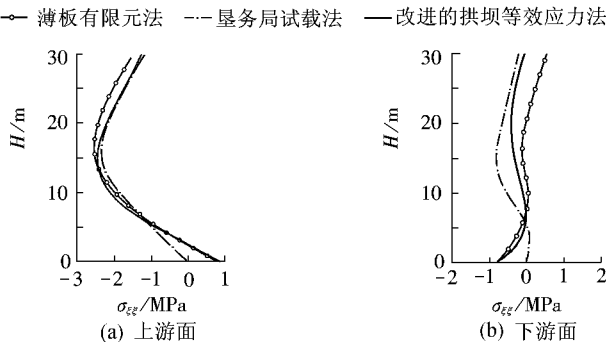


图 3 拱冠拱向应力

Fig.3 Vertical stress in central cantilever

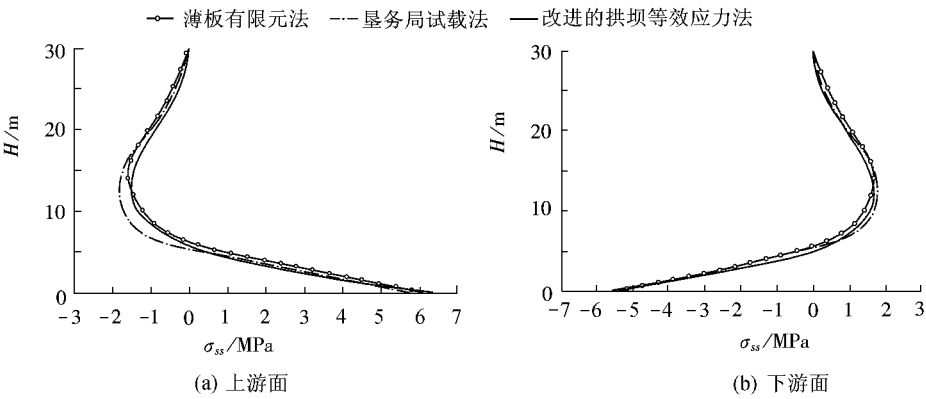


图 4 拱冠梁向应力
Fig.4 Hoop stress along central cantilever

3 结 语

本文提出的改进拱坝等效应力分析方法使得基于有限元内力法的拱坝等效应力的求解更加方便. 文中不仅导出了拱梁向应力沿厚度方向直线分布时的拱、梁向等效应力求解公式, 还导出了求解上、下游面的主应力简单公式. 算例说明了本文所提方法的正确性和适用性.

参考文献：

[1] 傅作新. 水工结构力学问题的分析与计算[M]. 南京: 河海大学出版社, 1993. 28—43.
[2] 李同春, 温召旺. 拱坝应力分析中的有限元内力法[J]. 水力发电学报, 2002, 79(4): 18—24.
[3] 美国垦务局. 拱坝设计[M]. 拱坝设计翻译组译. 北京: 水利水电出版社, 1984. 146—162.
[4] RYDZEWSKI J R. Theory of arch dams. symposium publications division[M]. London: Pergamon, 1964. 123—137.

An improved method for analysis of arch dam equivalent stress

LI Tong-chun¹, ZHANG Hang-hui²

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China ;
2. Taihu Basin Authority of Water Resources, Shanghai 200434, China)

Abstract : The finite element internal force method is improved for solution and analysis of the arch dam equivalent stress. On the assumption that the normal and shear stresses in the directions of arch and beam accord with the bilinear distribution in the plane elements of arch and beam sections, a formula is developed for calculation of the equivalent nodal stress from the constraining inner force along the sections. Furthermore, equations for solution of the equivalent stress and formulas for calculation of the main stress in the upstream face and downstream face are derived on the assumption of linear distribution of arch stress and hoop stress. The present method is applied to stress analysis for a typical cylindrical arch dam, and the calculated results of the arch stress and hoop stress conform to those obtained by the trial load method. Therefore, the calculated results of the arch dam stress by the present method can be used for safety assessment of arch dams according to the national arch dam design code.

Key words : arch dam ; equivalent stress ; finite element internal force method ; arch stress ; hoop stress