

定边界点二维正交曲线网格的数值生成方法

何国建,汪德,刘晓波

(河海大学环境科学与工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 使用一种可以在边界上任意确定网格点的方法生成二维正交曲线网格.结果表明:该法以求解拉普拉斯方程组为基础,物理概念明确,且无需构造“合并”或“聚集”控制函数,使得方程离散简单,经验性因素降低,该法网格线与边界的正交性良好,可随意控制网格的疏密度,而且利用这一特性可将分汊区域或多连域分割成多个单连域分别进行求解,使几何图形复杂的计算区域网格的生成得到简化.

关键词 正交曲线网格;网格数值生成;拉普拉斯方程

中图分类号 TV131.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2004)02-0140-04

正交曲线网格以其良好的贴体性及较高的计算精度而在水流数值模拟中得到了广泛的应用.目前常用的生成网格的坐标系大致可分为 2 类:一类是代数坐标系(ACS),即直接应用已知的代数方程,如折线、二阶曲线等,网格生成较方便,但贴体性差、人为因素较大,仅适用于规则边界问题,对于实际流场的计算,有其不适之处;另一类是微分坐标系(DCS),即通过求解特定的微分方程来生成坐标系,其坐标生成较前类复杂,但可以密切贴合边界,比较合理地分配网格,在某些情况下能做到正交,这不仅能简化工程问题的控制方程,还可以减少误差来源.

在通过求解椭圆型偏微分方程组来生成正交曲线坐标系的常用方法中,最为典型的方法是 Thompson 提出的求解带“合并”或“聚集”控制函数(packing function) P, Q 的泊松方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (1)$$

的方法,即 Thompson 方法^[1].使用该方法,可通过构造不同的 P, Q 函数^[2]来调节网格线的疏密程度.但该方法也有不足之处:(a)物理坐标系中网格点的位置不能预先给定,而且 P, Q 函数中可调参数太多,当生成网格不理想而需改善网格时,很难确定应调节的参数;(b)网格疏密程度的调节是以一定数量的等 ξ, η 线为中心的,对于大面积水域,局部加密不够灵活;(c)如果在计算域某边界指定位置布置网格或布置按某种规律变换的网格,则采用该法就难以实现.

文献 3-4 利用物理坐标系在变换平面中求解拉普拉斯方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

从而生成了正交曲线坐标系.该方法的优点是,可在两邻边上任意选择、布置网格点.本文应用该法进行了规则区域正交曲线网格生成及多连域网格生成的数值试验,并得到了较满意的结果.

1 网格生成原理

设 (x, y) 为物理平面上的二维笛卡儿坐标系 (ξ, η) 为变换(或映射)平面上的直角坐标系,通过数值变

换,希望将物理平面上的正交曲线网格变换为映射平面上单位正方形域中的规则正交网格.根据共轭调和函数的性质,当 ξ, η 为一对共轭函数时, ξ 和 η 在 (x, y) 平面上的等值线族就是一对正交曲线,在映射平面 (ξ, η) 上的相应值就构成所需要的规则正交网格.

下面通过共轭函数满足柯西-黎曼条件和映射与逆映射的存在关系,推导出映射平面规则正交网格中 x, y 所应满足的方程.

设一对共轭函数

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad \begin{matrix} (3-a) \\ (3-b) \end{matrix}$$

满足柯西-黎曼条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{matrix} (4-a) \\ (4-b) \end{matrix}$$

根据逆映射的存在,设

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad \begin{matrix} (5-a) \\ (5-b) \end{matrix}$$

对 (3-a) 式两边求 ξ 的导数、(5-a) 式两边求 x 的导数并相减得

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (6)$$

根据柯西-黎曼条件 (4-b),

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (7)$$

由于逆映射的存在,即 $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$,得

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8)$$

同理可求出

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (9)$$

即映射 (x, y) 满足柯西-黎曼条件.因此,它们在 (ξ, η) 平面上也是一对共轭调和函数,并满足拉普拉斯方程.为了使 ξ, η 无量纲化,让它们在 $0 \sim 1$ 中取值,引入一尺度因子 h ,方程变为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{h^2 \partial \eta^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{h^2 \partial \eta^2} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

根据 Antonopoulos^[5] 的计算,取 $h = \frac{L_\xi}{L_\eta}$.其中 L_ξ 是 ξ 等值线的总长, L_η 是 η 等值线的总长.在以 $P(\xi, \eta)$ 点为中心的控制体积中,将式 (10) 离散为

$$\begin{cases} A_P x_P = A_E x_E + A_W x_W + A_S x_S + A_N x_N \\ A_P y_P = A_E y_E + A_W y_W + A_S y_S + A_N y_N \end{cases} \quad (11)$$

式中: $A_E = \frac{1}{(\xi_E - \xi_W)(\xi_E - \xi_P)}$; $A_W = \frac{1}{(\xi_E - \xi_W)(\xi_P - \xi_W)}$; $A_N = \frac{1}{(\eta_N - \eta_S)(\eta_N - \eta_P)h^2}$; $A_S = \frac{1}{(\eta_N - \eta_S)(\eta_P - \eta_S)h^2}$; $A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$.其中下标 E, W, N, S 分别表示 P 点的 4 个相邻点.

2 网格生成过程

如图 1 所示,采用上述方法,可将物理平面的区域 $ABCD$ 转换成映射平面的单位面积域 $abcd$.由于物理平面区域的边界线也是网格线,因此需满足正交条件,即 A, B, C, D 两侧局部边界应相互垂直.实际工程中的绝大部分流体数值计算问题都可以满足这一条件.

先在一对邻边上布置网格点,再从这些点出发分别向对边作网格线,得出初始网格的坐标

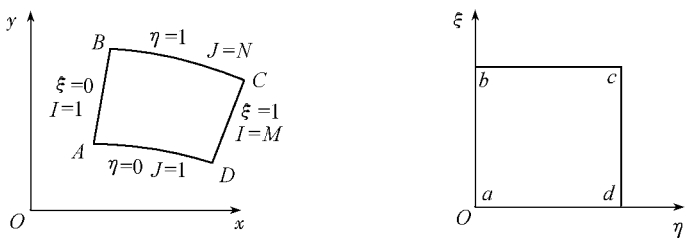


图 1 物理平面及映射平面

Fig.1 Sketch of physical and computational domains

值,同时给出初始 ξ, η 值. 由于一对邻边的网格点固定,而初始给定的 ξ, η 值并不一定和网格点真实的 ξ, η 值相等,因此先求出各网格点上对应 ξ, η 的真实值,再通过求解拉普拉斯方程组(10)得出内部网格点.

真实 ξ, η 值的求解采用逐步校正逼近的方法. 即在初始网格中,网格与边界一般不正交,假定欲求解的 ξ 为常数的线从南部边界 AD 上任选点出发,如图2所示,实线为初始网格线,虚线为 $J=1$ 线上通过边界点的垂线且与 $J=2$ 线相交,空心点为初始网格点,实心点为新点,垂线与初始网格线有一夹角, ξ 值的校正通过此夹角来进行:

$$\delta \xi = C_1 \delta \varphi$$

比例因子 C_1 一般可取 $0.00005^{[3]}$. 根据初始网格线与边界垂线的关系,以图2为例,修正后的 ξ^* 为

$$\xi_1^* = \xi_1 - \delta \xi_1 \quad \xi_3^* = \xi_3 + \delta \xi_3$$

根据上述,假设左边界和下边界网格点固定,则二维正交曲线坐标系的数值生成步骤为 (a) 给出初始的网格点坐标和 ξ, η 值 (b) 从下边界点出发,作边界垂线与 $J=2$ 线相交,得出 $J=2$ 线上的新的网格点坐标,根据 $\delta \varphi$ 求出 $\delta \xi$,进而求出新的 ξ 值 (c) 过 $J=N-1$ 线上的点,作上边界的垂线,垂足即为上边界的新点. 在此过程中,上边界的点是可滑动的,此步保证了上边界的正交 (d) 同理,从左边界出发,求出新的 η 值和右边界的新点 (e) 保证了边界的正交和得出新的 ξ, η 值后,求解拉普拉斯方程组,得出新的网格坐标点,判断是否达到收敛标准,如果没有,回到步骤 (b). 收敛判断的准则很多,本文例子使用的准则是 $\max[\delta \varphi(I), \delta \varphi(J)] \leq 1.0 \times 10^{-4} \text{rad}$.

3 算 例

为说明定边界点二维正交曲线网格生成方法的特点,特给出2个例子.

例1 边界规则的非对称渠槽截面的网格生成.

根据需要在其左边界和下边界定网格点,生成如图3所示的网格. 由图3 AA'点可见,该方法可通过确定边界点的密度人为地控制网格密度.

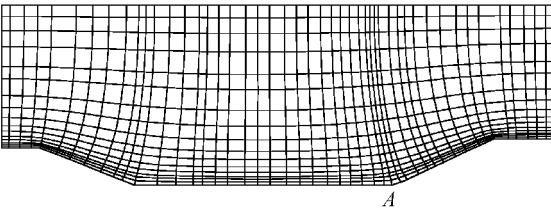


图3 物理区域上的正交曲线网格(x, y)
Fig.3 Orthogonal curvilinear grids
in physical domain(x, y)

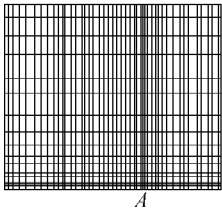


图4 计算区域上的网格(ξ, η)
Fig.4 Grids in computational domain(ξ, η)

例2 分汊区域或多连域的网格生成.

利用公共边将这种区域分成2个或多个单连域,在公共边上布置网格点,在每个单连域上分别进行求解,最后将其合并,构成整体网格. 如图5、6所示, A, B, C, D 与 A', B', C', D' 分别对应为同一点.

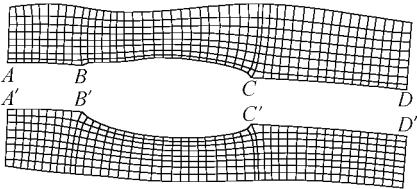


图5 分开生成的网格
Fig.5 Separate generation of grids

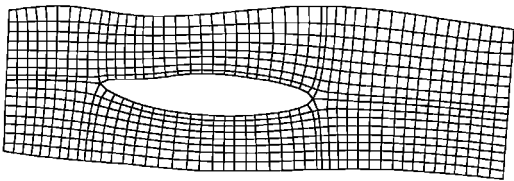


图6 合并后的完整网格
Fig.6 Finally integrated grids

4 结 语

a. 用物理坐标在变换平面上求解拉普拉斯方程,从而生成正交贴体坐标系,该方法物理概念明确,生成过程较简单,适用于不规则区域中正交曲线网格的生成,具有一定的通用性.

b. 从网格生成过程可看出,采用定边界点二维正交曲线网格生成方法,网格线与边界的正交性良好,并可根据收敛性要求来控制所要求的正交精度.

c. 在正交曲线网格生成过程中,一对邻边边界网格点固定,因此这对边界点与实际边界点完全重合,其对边采用张力样条函数插值,从而保证了边界的光滑性,并且网格边界线与实际边界线重合.

d. 由于定边界点二维正交曲线网格生成方法可随意控制网格的疏密度,因此,利用这一特性可将分叉区域或多连域分割成多个单连域分别进行求解,使几何图形复杂的计算区域的网格生成得到简化.

参考文献:

- [1] THOMPSON F. Computational fluid dynamic[M]. New York: McGraw-hill International Book Company, 1980. 1—99.
- [2] 刘玉玲, 魏文礼, 沈永明, 等. 边界处正交的曲线网格生成技术合理调节因子选取的研究[J]. 计算力学学报, 2002, 19(2): 195—197.
- [3] PAPANTONIS D E, ATHANASSIADIS N A. A numerical procedure for the generation of orthogonal body-fitted coordinate systems with direct determination of grid point on the boundary[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1985 (5): 245—255.
- [4] 余利仁. 二维正交贴体坐标系的数值生成和通用程序[J]. 水动力学研究与进展, 1989, 4(1): 113—121.
- [5] ANTONOPOULOS K A. Prediction of flow and heat transfer in rod bubbles[D]. London: Imperial College, 1979.

Numerical procedure for generation of 2-D orthogonal body-fitted curvilinear coordinate system with arbitrarily determined grid points on the boundary

HE Guo-jian, WANG De-guan, LIU Xiao-bo

(College of Environmental Science and Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the solution of the Laplace Equations, a numerical procedure for generation of 2-D orthogonal body-fitted curvilinear coordinate system is developed in which the grid points on the boundary can be arbitrarily determined. The method is clear in physical concept, and it is unnecessary to construct special controlling functions, hence the method makes the grid generation easier and also reduces some empirical influences. The grids generated by the method are of good orthogonality to the boundary, and the grid density can be adjusted arbitrarily. With such a characteristic, the braided region and multiply connected region can be divided into several simple connected regions to be solved respectively, and therefore the method simplifies the grid generation for the region with complicated geometric boundaries.

Key words: orthogonal curvilinear grid; numerical generation of grid; Laplace Equations