

总径流非线性响应的 Volterra 模型初探

李少华¹,董增川¹,李智录²,沈冰²

(1. 河海大学水资源环境学院,江苏 南京 210098 ;2. 西安理工大学水利水电学院,陕西 西安 710048)

摘要 :在总径流线性响应模型的基础上 ,提出了流域总径流非线性响应的 Volterra 模型 ,并给出了其建模和求解方法 .Volterra 模型的矩阵表达清晰 ,易于编程实现 .干河流域的应用结果表明 ,考虑了雨强大小、雨量分布等非线性影响因素的 Volterra 模型 ,其效果优于总径流线性响应模型 .
关键词 :总径流线性响应模型 ;非线性响应 ;Volterra 模型
中图分类号 :TV121 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2004)02-0151-04

系统理论与系统识别的研究已经比较成熟 ,用水文系统分析法建立的系统水文模型为洪水预报提供了一种便捷可行的途径 .文康等^[1]描述了总径流线性响应模型(TLR)与线性扰动模型(LPM)的数学结构 ,并将其应用于长江三峡流域 ,得到了令人满意的效果^[1] .王厥谋等^[2]结合概念性模型与黑箱子模型的特点 ,提出了一个两者相结合的综合约束线性系统模型(SCLS) .王真荣^[3]提出了总径流非线性响应模型(TNLRL) ,通过采用降雨强度“ 门限值 ”考虑了雨强的非线性影响 .本文在总径流线性响应模型的基础上 ,提出总径流非线性响应的 Volterra 模型 ,以考虑雨强变化和面雨量空间分布不均对产汇流过程的非线性影响 .

1 总径流线性响应模型简介^[3]

总径流线性响应模型 TLR(Total Runoff Linear Response Model)是近几年发展起来的以多元回归方法为基础的水文系统类模型 .该模型结构简单 ,对资料适应性较强 ,并具有反映流域特性的参数 .

把流域视作线性时不变系统 ,则 TLR 模型的数学表达式为

$$Q(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{1}$$

考虑到流域对过去降雨的记忆将随着时间而逐步消失 ,简化式(1)并将其写成离散型数学表达式 ,即

$$Q_r = \sum_{j=1}^L x_{r-j+1}h_j + V_r = x_rh_1 + x_{r-1}h_2 + \dots + x_{r-L+1}h_L + V_r \tag{2}$$

式中 : Q_r ——第 r 时段流域出流量 , $r=1,2,\dots,N$; x_r ——第 r 时段流域平均毛雨量 ,为系统输入值 ; h_j ——系统响应函数 , $j=1,2,\dots,L$; L ——系统记忆长度 ,反映了流域调蓄能力 ; V_r ——残差(扰动)项 .

令矩阵 Q , X , H 和 V 分别表示系统输出、输入、响应函数和残差项矩阵 ,则式(2)可写成

$$Q = XH + V \tag{3}$$

式(3)的响应函数可由最小二乘法求得 ,其最小二乘解为

$$\hat{H} = (X^T X)^{-1} X^T Q \tag{4}$$

如果一次降雨过程的时段雨量为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$,流量过程为 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$,则可由式(4)求得响应函数 $h_1, h_2, h_3, \dots, h_L$.同样可以由降雨系列和响应函数来推求流量系列 .

2 总径流非线性响应的 Volterra 模型的原理及推导

总径流非线性响应 Volterra 模型的基础是 Volterra 级数 .Volterra 级数是一种泛函级数 ,它是意大利数学家 Vito Volterra 于 1880 年作为 Taylor 级数的推广而提出来的 .1942 年 ,美国科学家、控制论奠基人 N. Wiener 首次将其用于非线性系统的分析 .随后 ,Volterra 级数受到人们的普遍重视 ,并广泛应用于各工程领域 .

收稿日期 2003-06-18
作者简介 李少华(1977—) ,男 ,山东济阳人 ,博士研究生 ,主要从事防洪调度与水资源规划管理研究 .

Volterra 级数之所以具有如此大的吸引力,根本原因在于它与幂级数有着相似之处,易于理解,并且 Volterra 核,特别是频域核,具有鲜明的物理意义,从而为解决非线性问题提供了一种很好的方法^[4].

把流域视作非线性时不变系统,则 Volterra 模型的数学表达式为

$$Q(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^t x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)g(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)r(\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots \tag{5}$$

式(5)中右端项中的 h, g, r 称为系统的一阶核、二阶核、三阶核,而省略号中则包含了三阶以上的核.若略去系统二阶以上的核,则此模型退化为前面介绍的总径流线性响应模型.

这里,基于计算稳定性和复杂性的考虑,对式(5)略去三阶核以上的非线性项,同时考虑到系统假定的不完善和观测资料的误差,在式(5)中加入残差(扰动)项,并写成离散型数学表达式,即

$$Q_r = \sum_{j=1}^L x_{r-j+1}h_j + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G_{ij}x_{r-i+1}x_{r-j+1} + V_r = x_rh_1 + x_{r-1}h_2 + \dots + x_{r-L+1}h_L + G_{1,1}x_rx_r + G_{1,2}x_rx_{r-1} + \dots + G_{1,M}x_rx_{r-M+1} + G_{2,1}x_{r-1}x_r + G_{2,2}x_{r-1}x_{r-1} + \dots + G_{2,M}x_{r-1}x_{r-M+1} + \dots + G_{M,1}x_{r-M+1}x_r + G_{M,2}x_{r-M+1}x_{r-1} + \dots + G_{M,M}x_{r-M+1}x_{r-M+1} + V_r \tag{6}$$

从式(6)可以看出, $G_{ij}x_{r-i+1}x_{r-j+1}$ 项和 $G_{ji}x_{r-j+1}x_{r-i+1}$ 项可合并,因此独立的 G_{ij} 只有 $M1 = M(M+1)/2$ 个.将其重新排序为一维数组,记为 $g_k(k=1, \dots, M1)$,其具体元素序号为

$$\left. \begin{aligned} k &= 1, \dots, M & g_k &= G_{1,k} \\ k &= M+1, \dots, M+(M-1) & g_k &= G_{2,k-M+1} \\ k &= M+(M-1)+1, \dots, M+(M-1)+(M-2) & g_k &= G_{3,k-M-(M-1)+2} \\ k &= M1-2, M1-1 & g_k &= G_{M-1,M-(M1-k)+1} \\ k &= M1 & g_k &= G_{M,M} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

则式(6)可写为

$$Q_r = x_rh_1 + x_{r-1}h_2 + \dots + x_{r-L+1}h_L + g_1x_rx_r + g_2x_rx_{r-1} + \dots + g_Mx_rx_{r-M+1} + g_{M+1}x_{r-1}x_{r-1} + \dots + g_{M+(M-1)}x_{r-1}x_{r-M+1} + \dots + g_{M1-2}x_{r-M+2}x_{r-M+2} + g_{M1-1}x_{r-M+2}x_{r-M+1} + g_{M1}x_{r-M+1}x_{r-M+1} + V_r \tag{8}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} Q_L \\ Q_{L+1} \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L & \dots & x_1 & x_Lx_L & \dots & x_Lx_{L-M+1} & x_{L-1}x_{L-1} & \dots & x_{L-1}x_{L-M+1} & \dots & x_{L-M+1}x_{L-M+1} \\ x_{L+1} & \dots & x_2 & x_{L+1}x_{L+1} & \dots & x_{L+1}x_{L-M+2} & x_Lx_L & \dots & x_Lx_{L-M+2} & \dots & x_{L-M+2}x_{L-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & \dots & x_{N-L+1} & x_Nx_N & \dots & x_Nx_{N-M+1} & x_{N-1}x_{N-1} & \dots & x_{N-1}x_{N-M+1} & \dots & x_{N-M+1}x_{N-M+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{M1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_L \\ V_{L+1} \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

同样,若令 $Q, X = [X_1 \ X_2], R = [H \ G]^T$ 和 V 分别表示系统输出向量、输入向量(X_1, X_2 分别为一阶核和二阶核对应的雨量矩阵)、响应函数向量(H 和 G 分别为一阶和二阶响应函数向量)和残差项向量,则式(9)可写成

$$Q = XR + V = [X_1 \ X_2] \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} + V$$

(10)

显然,其最小二乘解为

$$\hat{R} = (X^T X)^{-1} X^T Q$$

(11)

因此,如果一次降雨过程的时段雨量为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, 流量过程为 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$, 则可由式(11)求得非线性响应函数 $h_1, h_2, h_3, \dots, h_L$ 和 $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{M1}$. 同样,可以由降雨系列和响应函数来推算流量系列.

3 应用实例

千河是渭河左岸较大的支流之一,属黄河二级支流,干流总长 152.6 km,流域总面积 3 493 km². 千河流域属于暖温带大陆性半干旱地区,季风盛行,四季分明.该流域降雨径流关系具有干旱地区降雨径流关系的共性,即非线性因素影响较大,径流系数小且不稳定.这对洪水预报模型的建立会产生十分不利的影响.由于前述的系统模型具有结构简单、适应性强、便于实时校正和联机自动测报等优点,本文将总径流非线性响应的 Volterra 模型应用于千河流域洪水预报,并用误差序列自回归模型进行实时校正,以探索西北干旱半干旱地区洪水预报建模和预报系统开发的新途径.

流域对过去降雨的记忆将随着时间而逐步消失,上述 Volterra 模型中的记忆长度 L 在某种程度上反映了流域的汇流时间.另外,泛函级数对物理系统的描述在数学上应是收敛的,这反映在它的阶数越高,分量对系统的影响越小.基于计算稳定性和复杂性的考虑,千河流域洪水预报方案采用二阶 Volterra 洪水预报模型,因此所需率定的参数主要有 4 个:系统记忆长度(一阶为 L ,二阶为 M)和响应函数向量(一阶为 H ,二阶为 G).根据前述原则并结合千河流域的流域面积和降雨径流特性,将 Volterra 模型的一阶和二阶记忆长度分别取为 60 和 10.由公式 $M1 = (M + 1)M/2$ 算得二阶有效记忆长度 $M1$ 为 55.选定 1976 ~ 1983 年共 20 场雨洪资料用于模型参数率定,得出以上记忆长度下的响应函数 H 和 G ;选用未参与参数率定的 1984 ~ 1986 年共 5 场雨洪资料用于模型检验.以确定性系数 $DC \geq 80\%$ 作为成果是否合格的评判标准,上述基于 Volterra 模型的实时洪水预报方案的精度评定和检验结果及其与基于 TLR 模型的实时洪水预报方案的比较如表 1 所示.

表 1 模型评定及检验成果

Table 1 Result of model evaluation and verification

模型	评定合格率 /%	检验合格率 /%	总合格率 /%	方案精度 等级
TLR + AR	85	80	82.5	乙
Volterra + AR	90	80	85	甲

4 结 语

- a. 本文在给出 Volterra 模型推导过程的同时给出了模型求解矩阵的构造方法,这种良好的矩阵构造和表述有利于 Volterra 模型编程的实现.
- b. 从模型评定及检验结果可以看出,总径流非线性响应的 Volterra 模型,由于考虑了雨强变化和面雨量空间分布不均对产汇流过程的非线性影响,因而取得了比较好的效果.
- c. 响应函数是按严格的数学优化方法得出的,所以系统脉冲响应有一定波动,并出现了“前俯后翘”现象.脉冲响应中的负值出现在第 1 时段,在某种程度上反映了前期土壤含水量对产汇流的影响;尾部最后一个时段翘起,可理解为形成了量小而稳定的基流.
- d. 本文所述洪水预报方案的精度,较大程度上依赖了实时校正功能.如何吸取 TNL R 模型的思想,将结构和求解都比较复杂的 Volterra 模型改进为高阶多输入形式,值得进一步研究.

参考文献:

[1] 文康,梁庚辰.总径流线性响应模型与线性扰动模型[J].水利学报,1986(6):1—10.

- [2] 王厥谋, 张瑞芳, 徐贯午. 综合约束线性系统模型[J]. 水利学报, 1987(7): 1—9.
- [3] 王真荣. 总径流非线性响应模型(TNLR)的研究及应用[J]. 武汉水利电力学院学报, 1991, 24(5): 573—577.
- [4] 夏军. 水文非线性系统理论与方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002. 117—127.

Preliminary study on total runoff non-linear response Volterra model

LI Shao-hua¹, DONG Zeng-chuan¹, LI Zhi-lu², SHEN Bing²

(1. College of Water Resources and Environment, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;

2. College of Water Resources and Hydropower Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: On the basis of the Total Runoff Linear Response Model (TLR), a total runoff non-linear response Volterra model is brought forward, and the way to formulate the model and the solution to the model are also given. The Volterra model is expressed clearly in matrix form, which is convenient for programming. The application of the Volterra model to the Qianhe River basin indicates that, owing to its consideration of some non-linear factors, including the intensity and distribution of rainfalls, the accuracy of the model is higher than that of the TLR.

Key words: TLR; non-linear response; Volterra model

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊,主要刊登本校在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果、学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考。

本刊创办于1957年,是我国中文核心期刊,在国内工程技术界和学术界有较大影响。刊载的文章中,有不少国家科技攻关(重点)项目和各种科学基金资助项目的研究成果,部分达到了国内领先和国际先进水平,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议,发挥了较大的社会效益和经济效益,深受工程界和科技界赞许,并获得全国优秀高校自然科学学报二等奖,以及中国期刊方阵“双效期刊”、全国水利系统优秀期刊称号。

本刊每逢单月出版,国内外公开发行。邮发代号 28-63,每本定价 3.00 元,全年订费 48.00 元。欢迎广大读者在全国各地邮局订阅或直接与编辑部联系。联系地址:南京市西康路1号《河海大学学报(自然科学版)》编辑部,邮政编码 210098。