

基于指数分布的投入产出模型

吴和成, 郑垂勇

(河海大学商学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 用随机模型来描述经济系统的变化情况, 是符合实际的. 为此, 运用随机变量和的分布理论, 在直接消耗系数和最终需求为指数型随机变量的条件下, 导出了 n 个部门的投入产出模型的确定性等价方程.

关键词: 投入产出模型; 指数分布; 确定性等价方程

中图分类号: F223 F222.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2004)02-0233-03

投入产出分配平衡方程的一般形式为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中: a_{ij} ——直接消耗系数; x_i —— i 部门产出价值; y_i ——对 i 部门产出最终需求的价值. (1) 所表示的投入产出模型也称为静态模型, 它以投入系数即直接消耗系数的不变性(静态)为前提, 并且其最终需求的各经济量(家计消费、固定资产投资、政府消费、出口等)是作为外生变量而设定的. 实际上, 将 a_{ij} 及 y_i 分别理解成随机变量 A_{ij} , Y_i , 则更符合经济活动的实际情况. 即研究如下的随机投入产出模型.

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n + Y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

文 [1, 2] 从不同角度讨论了投入产出模型的随机性质. 在一定的条件下^[3], 文 [4] 研究了最终需求为正态型随机变量时投入产出优化控制模型. 文 [5] 假设 A_{ij} 和 Y_i 都为指数型随机变量, 提出如下模型:

$$P\{A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n + A_{in+1}x_{n+1} \leq x_i\} = 1 - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

其中 $A_{in+1} = Y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $x_{n+1} \equiv 1$, $\alpha_i \in [0, 1]$. (3) 表示部门 i 的产出能够满足中间需求和最终需求的可能性为 $1 - \alpha_i$. 文 [5] 就 $n = 2$, 在 A_{ij} 为服从参数为 λ_{ij} 的指数分布的条件下, 导出了 (3) 中 x_i 所满足的方程 ($i = 1, 2, \dots, n$). 在此方程中只含有 λ_{ij} 和 x_i , 由样本资料估计出 λ_{ij} , 再由此方程利用数值法求出 x_i , 这就是研究模型 (3) 的意义所在.

本文在某些条件下将文 [5] 的结果推广到一般情形, 以便能够广泛地应用于实际.

1 模 型

设 A_{ij} 服从参数为 λ_{ij} 的指数分布, 且对固定的 i , A_{ij} 之间相互独立 ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n+1$), 记 $B_{ij} = A_{ij}x_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n+1$), 则 (3) 可改写成

$$P\{B_{i1} + B_{i2} + \dots + B_{in+1} \leq x_i\} = 1 - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

由 A_{ij} 的分布可知 B_{ij} 服从参数为 λ_{ij}/x_j 的指数分布, 且 B_{ij} 之间相互独立 (对固定的 i) ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n+1$). 记 $Z_i = B_{i1} + B_{i2} + \dots + B_{in+1}$, 则式 (4) 为

$$P\{Z_i \leq x_i\} = 1 - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

由 Z_i 的定义可知, Z_i 是 $n+1$ 个独立的随机变量之和, 只要能求出其分布, 则由 (5) 就可以确定出 (3) 中每个 x_i 所满足的确定性等价方程.

2 主要结果

定理 设 A_{ij} 的密度函数 $f(u_{ij}) = \begin{cases} \lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}u_{ij}} & u_{ij} \geq 0 \\ 0 & u_{ij} < 0 \end{cases}$, 且对固定的 i , A_{ij} 之间相互独立, $x_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n+1$), 则

..., $n+1$).

a. 当 $\frac{\lambda_{ij}}{x_j} \neq \frac{\lambda_{ik}}{x_k}$ ($j \neq k$, $j, k = 1, 2, \dots, n+1$) 则 (3) 的确定性等价方程为

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left[\prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} \left(\frac{\lambda_{ik} x_j}{\lambda_{ik} x_j - \lambda_{ij} x_k} \right) e^{-\frac{\lambda_{ij} x_i}{x_j}} \right] = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

b. 当 $\frac{\lambda_{ij}}{x_j} = \lambda$ ($j = 1, 2, \dots, n+1$) 则 (3) 的确定性等价方程为

$$\sum_{j=0}^n \frac{(\lambda x_i)^j}{j!} e^{-\lambda x_i} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

3 结论的证明

在证明之前, 先给出如下 2 个引理.

引理 1 设 a_i 为实数, 且 $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$),

$$\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} \left(\frac{1}{a_j - a_i} \right) \frac{1}{a_i - a_n} \right] = \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_j - a_n} \right) \quad (8)$$

证明 令 $f(a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} \left(\frac{1}{a_j - a_i} \right) \frac{1}{a_i - a_n} \right] / \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_j - a_n} \right) \right\} - 1$

则 $f(a_n) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} (a_j - a_n) \right) \right] / \prod_{j=1}^{n-1} (a_j - a_i) \right\} - 1$. 易见 $f(a_n)$ 是一个关于 a_n 的 $n-2$ 次多项式, 又易知 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 都是 $f(a_n)$ 的 $n-1$ 个不相等的实根, 故 $f(a_n) \equiv 0$. 引理得证.

引理 2 设 a_i 为实数, 且 $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$),

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) = 1 \quad (9)$$

证明 要证明此引理, 先来证明如下结论.

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{s + a_i} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{a_i}{s + a_i} \quad (s \geq 0) \quad (10)$$

其中 $c_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{a_k}{a_k - a_i}$. 用归纳法证之.

a. 当 $n=2$ 时, 易验证 (10) 对一切 $s \geq 0$ 成立.

b. 设 $n > 2$ 时成立, 则在 $n+1$ 时, $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{s + a_i} = \left(\sum_{i=1}^n c_i \frac{a_i}{s + a_i} \right) \frac{a_{n+1}}{s + a_{n+1}}$, $c_i = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{a_k}{a_k - a_i}$. 由此,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{s + a_i} &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{a_i}{s + a_i} \frac{a_{n+1}}{s + a_{n+1}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - a_i} \frac{a_i}{s + a_i} \right] + \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) \frac{a_i}{a_i - a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{s + a_{n+1}} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_i} \frac{a_i}{s + a_i} \right) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) \frac{a_i}{a_i - a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{s + a_{n+1}} \right] \end{aligned}$$

在 $n > 2$ 的情况下, 令 $s = -a_{n+1}$, 得 $\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) \frac{a_i}{a_i - a_{n+1}} = \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i - a_{n+1}}$. 从而

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{s + a_i} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) \frac{a_i}{s + a_i} \right] + \left(\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i - a_{n+1}} \right) \frac{a_{n+1}}{s + a_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) \frac{a_i}{s + a_i} \right] \quad (s \geq 0)$$

即式 (10) 得证. 令式 (10) $s=0$, 则有 $\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) = 1$. 即引理 2 得证.

本文仅证明式 (6)、式 (7) 的证明, 只要用统计学上的一个事实就容易证得, 即 n 个相互独立且服从相同指数分布 (参数为 u) 的随机变量之和服从 $I(n, u)$ 分布. 故 (7) 的证明从略.

要证明式 (6), 只要求出 $n+1$ 个独立的指数型随机变量 (参数各不相同) 之和的分布密度, 再求积分即

可.由卷积公式和归纳法可证明下列事实.

设 $X_i \sim \begin{cases} \beta_i e^{-\beta_i t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $\beta_i \neq \beta_j (i \neq j)$ 且 X_i 间相互独立. 又设 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 Y 的分布密度为

$$p_Y(y) = \begin{cases} \left\{ \prod_{i=1}^n \beta_i \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{1}{\beta_j - \beta_i} \right) \right) e^{-\beta_i y} \right\} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (11)$$

用归纳法证明式(11).(a)当 $n=2$ 时, $Y=X_1+X_2$, 由卷积公式易得式(11).(b)设当 $n-1$ 时, 即 $Y_1 = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ 式(11)成立, 则对于 n , 由 X_i 间的独立性知 Y_1 与 X_n 独立. 令 $Y=Y_1+X_n$, 由卷积公式得

$$p_Y(y) = \int_0^y p_{Y_1}(y-u) p_{X_n}(u) du = \int_0^y \left[\prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \right] \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{1}{\beta_j - \beta_i} \right) e^{-\beta_i u} \right] e^{-\beta_n(y-u)} du =$$
$$\left[\prod_{i=1}^n \beta_i \right] \left[\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{\beta_j - \beta_i} \right) e^{-\beta_i y} \right] \quad (\text{由引理 1})$$

即对 n , 式(11)也成立. 从而式(11)得证. 下面证明式(6).

记 $\beta_j = \frac{\lambda_{ij}}{x_j}$, 则由式(5) $P\{Z_i \leq x_i\} = 1 - \alpha_i$ 及式(11)得 $\int_0^{x_i} \left[\prod_{k=1}^{n+1} \beta_k \right] \left[\sum_{j=1}^{n+1} \left(\prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} \frac{1}{\beta_k - \beta_j} \right) e^{-\beta_j y} \right] dy = 1 - \alpha_i$,

即 $\left[\prod_{k=1}^{n+1} \beta_k \right] \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{1}{\beta_j} \left(\prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} \frac{1}{\beta_k - \beta_j} \right) (1 - e^{-\beta_j x_i}) \right] = 1 - \alpha_i$ 或 $\sum_{j=1}^{n+1} \left(\prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} \frac{\beta_k}{\beta_k - \beta_j} \right) (1 - e^{-\beta_j x_i}) = 1 - \alpha_i$ 由引理 2 得

$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\prod_{k=1, k \neq i}^{n+1} \frac{\beta_k}{\beta_k - \beta_j} \right) e^{-\beta_j x_i} = \alpha_i$. 从而 $\sum_{j=1}^{n+1} \left[\prod_{k=1, k \neq j}^{n+1} \left(\frac{\lambda_{ik} x_j}{\lambda_{ik} x_j - \lambda_{ij} x_k} \right) e^{-\frac{\lambda_{ij}}{x_j} x_i} \right] = \alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$. 于是式(6)得证.

4 结 束 语

本文运用统计理论和方法把[5]的研究结果从 $n=2$ 推广到一般情形, 这既有利于理论研究的进一步深入, 也为应用研究提供了一种方法. 在文中所给出的定理中, 仅讨论了 $\lambda_{ij}/x_j (j=1, 2, \dots, n+1)$ 之间两两相等和全相等的情形, 至于这些参数间有部分相等的情形, 将另文讨论之.

参考文献 :

[1] 韩东 胡锡健. 随机投入产出模型分析 [J]. 新疆大学学报, 1995 (2) 39—41.
[2] 陈木法. 经济最优化的随机模型 [J]. 应用概率统计, 1992 (3) 289—294.
[3] 赵秀恒. 投入产出模型求解条件的进一步研究 [J]. 统计研究, 1997 (1) 63—64.
[4] 温盛儒. 在最终需求服从正态分布的随机变量时的投入产出优化控制模型 [J]. 数量经济技术经济研究, 2002 (11) 56—58.
[5] HARRIS T R, GOICOECHEA A. An interindustry economic model with stochastic parameters: use of non-normal deterministic equivalents [J]. Large Scale Systems, 1986 (11) 177—191.

Exponential distribution-based input-output model

WU He-cheng, ZHENG Chui-yong

(Business School, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract : In consideration of the fact that the stochastic model can reflect the reality of economic phenomena, the theory of sum distribution of random variables is adopted in this paper. Under the assumption that the coefficients of direct consumption and final demand are random variables with the exponential distribution, the deterministic equivalent equations for input-output model of n departments are derived.

Key words : input-output model ; exponential distribution ; deterministic equivalent equation