

拟线性抛物型方程边值问题差分方程解的存在与惟一

钮 群

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 数值求解拟线性抛物型偏微分方程边值问题通常可归结为解非线性方程组,非线性方程组解的存在与惟一性是解方程组的前提.为此,用差分方法建立了数值求解一类拟线性抛物型方程边值问题的非线性方程.根据同胚理论得到了该方程组解存在与惟一的结果,并通过具体例子给予了说明.

关键词 抛物型方程;边值问题;同胚;正定;半正定

中图分类号:O175.8 文献标识码:A 文章编号:1000-198X(2004)02-0236-03

1 差分方程的建立

考虑拟线性抛物型偏微分方程第一边值问题^[1]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 & 0 < x < b, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq b \\ u(0, t) = u_1(t), u(b, t) = u_2(t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

假设函数 $f(x, t, u, v)$ 关于 u 和 v 具有一阶连续偏导数,且 $0 \leq t \leq T$ (T 为正常数).将 $[0, b] \times [0, T]$ 分别分为 $m+1$ 等份,步长分别为 $h = \frac{b}{m+1}, \tau = \frac{T}{m+1}$.设 $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < b, 0 < t < T\}$, $\Omega_{h, \tau} = \{(ih, j\tau) | i, j = 1, 2, \dots, m\}$, 则 $\Omega_{h, \tau}$ 为 Ω 的部分内点的集合.任取 $P_{i, j} = (ih, j\tau) \in \Omega_{h, \tau}$, 令

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{P_{i, j}} &\approx \tau^{-1}(u_{ij} - u_{i, j-1}) = \delta_t, & \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{P_{i, j}} &= \delta_t + O(\tau) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_{i, j}} &\approx (2h)^{-1}(u_{i+1, j} - u_{i-1, j}) = \delta_x, & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_{i, j}} &= \delta_x + O(h^2) \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{P_{i, j}} &\approx h^{-2}(u_{i+1, j} + u_{i-1, j} - 2u_{ij}) = \delta_{xx}, & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{P_{i, j}} &= \delta_{xx} + O(h^2) \end{aligned}$$

把上述差分近似代入方程(1),又令 $\sigma = \frac{\tau}{h^2} a^2 > 0$, 可得(1)的差分方程

$$(1 + 2\sigma)u_{ij} - u_{i, j-1} - \sigma u_{i+1, j} - \sigma u_{i-1, j} + \tau f(ih, j\tau, u_{ij}, \frac{u_{i+1, j} - u_{i-1, j}}{2h}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

由泰勒公式可以证明差分方程(2)的截断误差为 $O(\tau) + O(h^2)$.

令 $y_k = u_{ij}, k = i + (j-1)m, i, j = 1, 2, \dots, m$, 则 $k = 1, 2, \dots, n, n = m^2$. 于是差分方程(2)又可写为

$$Ay + \Phi(y) = b \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &\in L(\mathbb{R}^n), \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n \\ A &= (1 + 2\sigma)I - \sigma \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1 \\ (l=1, 2, \dots, m-1)}}^n e_k e_{k-1}^T - \sigma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq lm \\ (l=1, 2, \dots, m)}}^{n-1} e_k e_{k+1}^T - \sum_{k=1}^{n-m} e_{m+k} e_k^T \\ b &= \sum_{k=1}^m \varphi(kh) e_k + \sigma \sum_{k=1}^m u_1(k\tau) e_{n(k-1)+1} + \sigma \sum_{k=1}^m u_2(k\tau) e_{mk} \end{aligned}$$

$$e_k = (\underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}_k, 1, 0 \ \cdots \ 0)^T \in \mathbf{R}^n$$

令 $q_1 = \left(h, \tau, y_1, \frac{y_2 - u(0, \tau)}{2h} \right), q_2 = \left(2h, \tau, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h} \right), \dots, q_m = \left(mh, \tau, y_m, \frac{u(b, m\tau) - y_{m-1}}{2h} \right), \dots,$
 $q_{n-m+1} = \left(h, m\tau, y_{n-m+1}, \frac{y_{n-m+2} - u(0, m\tau)}{2h} \right), \dots, q_{n-m+2} = \left(2h, m\tau, y_{n-m+2}, \frac{y_{n-m+3} - y_{n-m+1}}{2h} \right), \dots, q_n$
 $= \left(mh, m\tau, y_n, \frac{u(b, m\tau) - y_{n-1}}{2h} \right)$ 则

$$\Phi(y) = (\varphi(q_1), \varphi(q_2), \dots, \varphi(q_m), \dots, \varphi(q_{n-m+1}), \varphi(q_{n-m+2}), \dots, \varphi(q_n))^T$$

2 非线性差分方程组解的存在与惟一

为了讨论非线性差分方程 (3) 解的存在与惟一, 介绍以下的概念和引理.

定义 1 设映照 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 如果 F 在 D 上是单值的, 并且 F 和 F^{-1} 分别在 D 和 $F(D)$ 上连续, 则称 F 是一个将 D 映到 $F(D)$ 上的同胚.

从定义 1 可见, 要证明差分方程 (3) 解的存在与惟一, 只需证明非线性映照 $A + \Phi$ 是 $\mathbf{R}^n$ 映到 $\mathbf{R}^n$ 的同胚.

引理 1^[2] 设 $A \in L(\mathbf{R}^n)$ 是正定的, $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续可微的, 并对所有 $y \in \mathbf{R}^n, \Phi'(y)$ 是半正定的, 那么 $A + \Phi$ 是将 $\mathbf{R}^n$ 映到它自身的同胚.

定理 1 设拟线性抛物型方程边值问题 (1) 中 $f(x, t, u, v)$ 关于 u 和 v 具有一阶连续偏导数, 并且 $|f_v(x, t, u, v)| \leq \omega, f_u(x, t, u, v) \geq h^{-1}\omega$, 其中 ω 为非负常数 $(x, t, u, v) \in [0, b] \times [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. 那么非线性差分方程 (3) 的解存在而且惟一.

证明 差分方程 (3) 为 $Ay + \Phi(y) = b$, 先证明矩阵 A 的正定性. 任取

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n \quad y \neq 0$$
$$y^T A y = y^T \left[(1 + 2\sigma)I - \sigma \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n e_k e_{k-1}^T - \sigma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq lm}}^{n-1} e_k e_{k+1}^T - \sum_{k=1}^{n-m} e_{m+k} e_k^T \right] y =$$
$$(1 + 2\sigma) y^T y - \sigma \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n y^T (e_k e_{k-1}^T) y - \sigma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq lm}}^{n-1} y^T (e_k e_{k+1}^T) y - \sum_{k=1}^{n-m} y^T (e_{m+k} e_k^T) y =$$
$$(1 + 2\sigma) \sum_{k=1}^n y_k^2 - \sigma \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n y_k y_{k-1} - \sigma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq lm}}^{n-1} y_k y_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-m} y_{m+k} y_k =$$
$$(1 + 2\sigma) \sum_{k=1}^n y_k^2 - \frac{\sigma}{2} \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n (y_k^2 + y_{k-1}^2) - \frac{\sigma}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq lm}}^{n-1} (y_k^2 + y_{k+1}^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-m} (y_{m+k}^2 + y_k^2) +$$
$$\frac{\sigma}{2} \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n (y_k - y_{k-1})^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq lm}}^{n-1} (y_k - y_{k+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-m} (y_{m+k} - y_k)^2 =$$
$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=n-m+1}^n y_k^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{l=1}^{m-1} y_{lm+1}^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{l=1}^{m-1} y_{lm}^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{l=1}^m y_{lm}^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{l=1}^m y_{lm-1}^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n (y_k - y_{k-1})^2 +$$
$$\frac{\sigma}{2} \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq lm+1}}^n (y_k - y_{k+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-m} (y_{m+k} - y_k)^2 > 0$$

即矩阵 A 是正定的. 下面证明 $\Phi'(y)$ 对所有 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 的半正定性.

$$\Phi'(y) = \tau \sum_{k=1}^n \varphi_{kk} e_k e_k^T + \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k e_{k+1} e_k^T - \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{k+1} e_k e_{k+1}^T$$
$$\varphi_{kk} = f_{uu}(q_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\varphi_{k+1,k} = \begin{cases} f_v(q_{k+1}) & k \neq lm+1 \\ 0 & k = lm+1 \end{cases}$$
$$\varphi_{k,k+1} = \begin{cases} f_v(q_k) & k \neq lm \\ 0 & k = lm \end{cases} \quad (l=1,2,\dots,m; k=1,2,\dots,n-1)$$

任取 $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)^T \in \mathbf{R}^n$ $z^T \Phi'(y)z = \tau \sum_{k=1}^n \varphi_{kk} z_k^2 + \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{k,k+1} z_k z_{k+1} - \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{k+1,k} z_{k+1} z_k \geq \tau \sum_{k=1}^n \varphi_{kk} z_k^2$
 $- \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^n |\varphi_{k,k+1} - \varphi_{k+1,k}| |z_k| |z_{k+1}| \geq \tau \sum_{k=1}^n h^{-1} \omega z_k^2 - \frac{2\omega\tau}{2h} \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| |z_{k+1}| = \tau h^{-1} \omega \sum_{k=1}^n z_k^2 - \frac{\omega\tau}{2h} \sum_{k=1}^{n-1} [z_k^2 + z_{k+1}^2 - (|z_k| - |z_{k+1}|)^2] \geq \tau h^{-1} \omega \sum_{k=1}^n z_k^2 - \tau h^{-1} \omega \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (z_k^2 + z_{k+1}^2) \geq 0$ 因此 $\Phi'(y)$ 是半正定的. 由于 $f_u(x,t,u,v)$ 及 $f_v(x,t,u,v)$ 连续, 从而 $\Phi(y)$ 连续可微.

由引理 1 可知, 非线性映照 $A + \Phi$ 是将 $\mathbf{R}^n$ 映到 $\mathbf{R}^n$ 的同胚. 差分方程 (3) 为

$$Ay + \Phi(y) = b \quad b \in \mathbf{R}^n \quad y = (A + \Phi)^{-1}b$$

即差分方程 (3) 的解存在且惟一. 证毕.

定理 1 的条件很容易验证. 例如, 拟线性抛物型方程边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + f(x,t,u,v) = 0 & 0 < x < b, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u(0,t) = u_1(t), u(b,t) = u_2(t) & 0 \leq x \leq b, t \geq 0 \end{cases}$$

其中

$$f(x,t,u,v) = \arctan(2x + 3t + u^5) \quad f_v(x,t,u,v) = 0 \quad \omega = 0$$

$$f_u(x,t,u,v) = \frac{5u^4}{1 + (2x + 3t + u^5)^2} \geq 0 = h^{-1}\omega \quad (x,t,u,v) \in [0,b] \times [0,T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

由定理 1 可知, 差分方程 (3) 的解存在且惟一.

参考文献：

[1] 王梓坤. 常用数学公式大全[M]. 重庆: 重庆出版社, 1991. 1112—1122.
[2] 奥特加 J M, 莱因博尔特 W C 著. 多元非线性方程组迭代解法[M]. 朱季纳译. 北京: 科学出版社, 1983. 151—153.

Existence and uniqueness of solution to nonlinear difference equation for quasilinear parabolic boundary value problems

LIU Qun

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract : A nonlinear equation for the boundary value problem of the quasilinear parabolic equation is set up by use of the difference method. The existence and uniqueness of the solution to the equation are verified based on the homeomorphism theory, and an example is given to show the rationality of the solution.

Key words : parabolic equation ; boundary value problem ; homeomorphism ; positive definite ; semi-positive definite