

两强市场广告竞争混沌的参数调节反馈控制方法

童纪新¹ 裴 明² 李 煜³

(1. 河海大学商学院, 江苏 南京 210098; 2. 河南大学数学与信息科学学院, 河南 开封 475001;
3. 南京大学工程管理学院, 江苏 南京 210093)

摘要 建立了一个 Kopel 双寡头垄断广告竞争模型, 发现企业的广告行为将引起市场的不稳定甚至混沌. 在控制系统的不稳定不动点之前, 首先运用概率动力系统理论研究了实施有效控制所要求的参数调节范围, 然后运用参数调节反馈控制方法实现了对模型的多周期轨道的控制及系统在混沌态与不同周期轨道间的转换, 从而有效地改善了系统的性态. 研究表明, 当市场竞争白热化时, 企业广告费用投入即使是微小的变化也将导致系统性态的极大改变.

关键词 双寡头垄断; 广告竞争; 参数调节; 混沌控制

中图分类号 F208 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2004)03-0328-04

近年来, 经济系统中的非线性现象已经引起了一些经济学家的高度关注^[1~3]. 如何消除有害的混沌, 而对有益的混沌加以诱导, 已经成为经济混沌研究的热点之一. 文献 [1] 研究了一个财务管理模型的多参数调节控制. 但总体来说, 这方面研究还较滞后, 从而影响了混沌理论在经济系统中的应用. 因此, 把一些比较成熟的混沌控制方法运用于具体的混沌经济系统, 将对实际的经济运行产生重要的指导意义.

一类新的双寡头垄断市场广告竞争模型^[2,3]如下:

$$x_{t+1} = (1 + g_t)(1 - \rho)x_t + \rho\mu y_t(1 - y_t) \quad (1)$$

$$y_{t+1} = (1 + g_t)(1 - \rho)y_t + \rho\mu x_t(1 - x_t) \quad (2)$$

$$g_{t+1} = (1 - r)g_t + ag_t(1 - g_t) \quad (3)$$

式中: x_t, y_t —— t 时刻两家厂商的产量; ρ, μ ——两家厂商的产出参数; g_t —— t 时刻广告效应的度量, $g_t \in [0, 1]$; r, a ——广告折旧和费用. 本文考虑两家厂商采取相近的广告战略的情况.

记

$$\mu_1 = \frac{\rho\mu}{1/(1+g) + \rho - 1}$$

则系统的 3 个非零不动点为

$$\text{I} \quad (1 - 1/\mu_1, 1 - 1/\mu_1, 1 - r/a) \quad (4)$$

$$\text{II} \quad \left(\frac{\mu_1 + 1 - \sqrt{(\mu_1 + 1)(\mu_1 - 3)}}{2\mu_1}, \frac{\mu_1 + 1 + \sqrt{(\mu_1 + 1)(\mu_1 - 3)}}{2\mu_1}, 1 - r/a \right) \quad (5)$$

$$\text{III} \quad \left(\frac{\mu_1 + 1 + \sqrt{(\mu_1 + 1)(\mu_1 - 3)}}{2\mu_1}, \frac{\mu_1 + 1 - \sqrt{(\mu_1 + 1)(\mu_1 - 3)}}{2\mu_1}, 1 - r/a \right) \quad (6)$$

分析不动点 II 的稳定性, 其它不动点的分析与此类似. 系统在 II 处的 Jacobi 矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} (1 + g)(1 - \rho) & -\frac{\rho\mu}{\mu_1}(1 + g)(1 - \sqrt{(\mu_1 - 1)(\mu_1 + 3)}) & x/(1 + g) \\ -\frac{\rho\mu}{\mu_1}(1 + g)(1 + \sqrt{(\mu_1 - 1)(\mu_1 + 3)}) & (1 + g)(1 - \rho) & y/(1 + g) \\ 0 & 0 & 1 - ag \end{bmatrix}$$

它的 3 个特征根为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1 + g) \left(1 - \rho \pm \frac{\rho\mu}{\mu_1} \sqrt{4 - \mu_1^2 + 2\mu_1} \right) & \lambda_3 &= 1 - ag \end{aligned} \tag{7}$$

容易看出, λ_1, λ_2 中都有因子 $1 + g$, 同时由前面的假设 $1 < 1 + g < 2$, 所以寡头的广告行为是引起系统不稳定的主要原因. 由稳定性条件知, 当 $0 < a - r < 2$ 时 $\lambda_3 < 1$. 通过上面的分析能进一步了解厂商的广告行为对竞争状态的影响. 随着厂商广告费用参数的改变, 系统的行为越来越复杂, 最终由倍周期分岔进入混沌, 在混沌区中, 有许多的周期窗口. 企业间的激烈竞争所造成的市场无序如果长期持续, 对谁也没有好处. 因此借助模型探讨如何较为有效的消除市场中的混沌、建立秩序, 为企业管理者提供一定的决策参考是非常有意义的.

1 寡头广告竞争模型的混沌控制

1.1 不稳定周期 1 轨道的控制

非线性动力系统的混沌现象通常是由系统参数的扰动引起的, 控制或诱导混沌就是直接调节这些参数. 因此, 研究如何较为准确地确定可控参数的调节范围, 减少参数调整的盲目性, 提高控制效率也就显得尤为重要. 市场的不稳定(甚至混沌)主要是由寡头的广告行为引起的, 厂家可以通过适当调节广告费用的支出来控制混沌.

1.1.1 广告费用参数 a 的有效调节范围

基于概率动力系统理论^[4]建立一个等价于受参数扰动的混沌系统, 通过计算相关的特征指数得到广告费用控制参数 a 的扰动范围. 由式(4)(5)(6)算得其 3 个不稳定不动点为

I	$(x^*, y^*, g^*) = (0.6891, 0.6891, 0.9091)$
II	$(0.5071, 0.8038, 0.9091)$
III	$(0.8038, 0.5071, 0.9091)$

参数扰动控制只有当状态变量进入不动点的充分小邻域以后才会有效. 而状态变量在不稳定不动点邻域对系统的影响, 等价于一个伸缩映射, 即

$$\alpha(g, \alpha) = g^* + \alpha(g - g^*)$$

参数 α 与受扰映射 $f(g, a) = (1 - r)g + ag(1 - g)$ 的不动点 ξ 有关. 若 $\alpha < 1$ (> 1), 映射 $\alpha(g, \alpha)$ 就表现为在不动点邻域内变化率为 α 的伸缩映射. 对多参数调节高维混沌系统, α 由系统的 Jacobi 矩阵行列式的特征根所决定. 设 ξ 表示 f 的不动点, 则应有关于 ξ 的 $\alpha(g, \alpha)$, 即

$$\xi = g^* + \alpha(g - g^*)$$

它即为伸缩率 σ 的在不稳定不动点 I 邻域的伸缩映射. 又 $\xi = 1 - r/a$, 所以

$$\alpha(\sigma) = r(1 - g^* - \alpha(g - g^*))$$

这样, 扰动参数 a 就是 σ 的函数, 对每一次落在不稳定不动点 ϵ 邻域的状态点, 选择的 σ 值就确定了允许参数扰动的形式. 这样通过定义压缩映射每次迭代 σ 的概率密度 $p(\sigma)$ 就定义了一个基于概率的动力系统. 由方程(3)得

$$\alpha(g, \sigma) = (1 - r)g + rg(1 - g)(1 - g^* - \alpha(g - g^*))$$

如果 ϵ 充分小, 将上式在 g^* 附近作泰勒展开, 并取一次近似, 有

$$\alpha(g, \sigma) = g^* + (3.0003\sigma - 2.7003)(g - g^*)$$

取 $\alpha(\sigma) = 3.0003\sigma - 2.7003$, σ 扰动的概率密度 $p(\sigma)$ 为 $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ 中的均匀分布, 即

$$p(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} & \text{当 } \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}] \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

不动点稳定的特征指数为(取 $\sigma_{\min} = 0$)

$$\begin{aligned} \Lambda(0, \sigma_{\max}) &= \int_0^{\sigma_{\max}} p(\sigma) |g| |3.0003\sigma - 2.7003| d\sigma = \\ &[(3.0003\sigma_{\max} - 2.7003)g |3.0003\sigma_{\max} - 2.7003| - \\ &(3.0003\sigma_{\max} - 2.7003) + 2\lg 2.7003 - 2] \times (3\sigma_{\max})^{-1} \end{aligned}$$

只有当 $\Lambda < 0$ 即 $\sigma_1 \leq \sigma_{\max} \leq \sigma_2$ 时控制才有效,如取 $\sigma_{\max} = 1.1$, $\epsilon = g - g^* = 0.001$, 则可以得到控制参数的范围,即 $3.2609 \leq a \leq 3.3408$. 同时,选择不同的概率密度函数及 ϵ , 对参数调节范围的确定有很大影响.一般地,若系统状态点与不稳定不动点越接近,参数调节范围越小.在研究参数调节控制域的基础上,运用参数调节反馈控制方法可实现对式(3)的不动点的控制.

1.1.2 控制方法及实现

1990 年, Ott E 等根据混沌系统对参数变化敏感及混沌吸引子的不稳定周期轨道的稠密性等提出了参数扰动方法,该法很好地控制了混沌运动,但实际应用时很不方便且有可能失效. 本文结合极点配置技术得到新的参数调节控制方法^[1].

假定离散混沌系统方程为

$$X_{t+1} = f(X_t, \mu)$$

它是 $R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 的一个映射,其中 X_t ——系统状态变量; μ ——系统控制输入. 设 $X_f(\mu_0)$ 为 $\mu = \mu_0$ 时系统的不动点. 首先在给定的初始条件下,应用系统方程进行迭代,考察系统状态点 X_t 与不动点 $X_f(\mu_0)$ 的距离,如果 $\|X_t - X_f(\mu_0)\| < \epsilon$, 则在 $\mu = \mu_0$ 的较小邻域内,用一阶线性系统来替代,由于混沌系统的遍历特征,保证了状态轨道最终进入到 $\mu = \mu_0$ 的邻域内,这样运用反馈控制规律来镇定原系统,从而将轨道导向预定的轨道.

$$\left. \begin{aligned} X_{t+1} &= (T - PQ)(X_t - X_f(\mu_0)) + X_f(\mu_0) \\ \mu_{t+1} &= \mu_0 - Q(X_t - X_f(\mu_0)) \times u(\delta - \|Q(X_t - X_f(\mu_0))\|) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$
$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

用式(8)进行迭代,直到满足精度要求为止.

当考虑不动点的某个 ϵ 邻域时,参数调节的有效性设为 $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, 则当式(8)中 $u(x) = 1$ 时,如果 $\mu_0 - Q(X_t - X_f(\mu_0)) < \mu_1$, 取 $\mu_{t+1} = \mu_1$. 而当 $\mu_0 - Q(X_t - X_f(\mu_0)) > \mu_2$, 取 $\mu_{t+1} = \mu_2$.

有了系统在不动点 $II(x^*, y^*, g^*)$ 处的 Jacobi 矩阵,设控制输入向量 $P = (0 \ 0 \ g(1 - g))^T$. 初始值 $(x_0, y_0, g_0) = (0.2 \ 0.4 \ 0.5)$, 当 $\|X_t - X_f(\mu_0)\| < 10^{-3}$ 时加入控制. 取极点配置向量为 $(0.5823 + 0.4930i, 0.5823 - 0.4930i, 0)$. 则极点配置矩阵 $Q = (0.0019 \ -0.0013 \ -24.2007)$. 在给定的精度下,要使控制有效, $3.2609 \leq a \leq 3.3408$. 如果在较早时刻($t = 50$)加入控制,系统刚开始会在不动点 I 处作非常微小的振荡,随着调节参数的改变,稳定在另一平衡点 II,对应的 a 值为 3.30218633329036 . 其中第一家厂商的产出稳定在一个较小的值上,而第二家厂商却稳定在较大的值. 这个现象说明:当两个寡头厂商采取微调广告费用的支出来消除混沌时,刚开始的产出水平差异可能很小,但长期来看,可能造成一家厂商产出水平的提高和另一家产出水平的降低,即长期来看会对其中的一家有利. 而如果在较晚时刻($t = 250$)加入控制,则系统始终稳定在不动点 I 处,对应的 a 为 3.30070338282971 . 此时两家厂商始终保持相同的产出水平,如图 2 所示. 这些结果表明,控制时刻的选择与控制结果的最终状态关系很大.

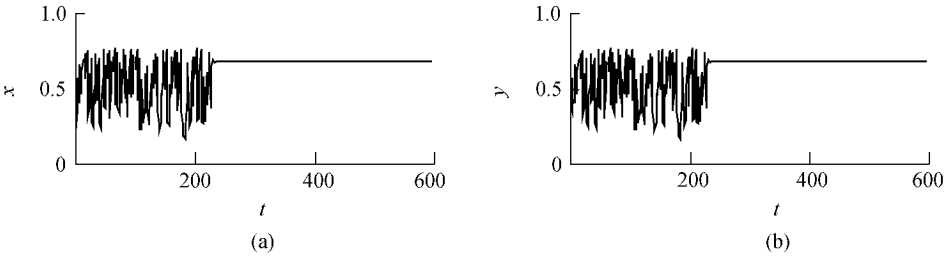


图 2 市场稳定到周期 1 轨道

Fig.2 Stabilizing the system to orbit of period 1

1.2 多周期轨道的控制

要稳定周期为 K 的多周期轨道,最直接的办法就是对映射进行 K 次迭代,经 K 次迭代后,周期轨道上

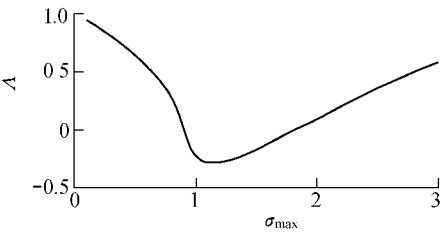


图 1 $\Lambda \sim \sigma_{\max}$ 的关系

Fig.1 Relationship between Λ and $\sigma_{\max}$

的任何点都变成了不动点,然后就可以用控制的方法来稳定这个不稳定的周期轨道.

具体步骤如下:令 $X_f(\mu_0)$ 表示周期 K 的轨道,即 $X_{f+K}(\mu_0) = X_f(\mu_0)$.

a. 如果 $\|X_t - X_f(\mu_0)\| < \epsilon$, 计算 K 个 $n \times n$ 阶矩阵 T_t 和 $n \times m$ 阶矩阵 P_t .

b. 在周期轨道上的每一点 $X_{f+K}(\mu_0)$ ($t = 0, 1, \dots, K-1$) 处计算 $T_t T_{t-1} \dots T_{t-k+1}$ 的稳定特征向量 $\{v_{t,1}, v_{t,2}, \dots, v_{t,s}\}$ 及 $\varphi_{t,j}$ ($j = 0, 1, \dots, u-1$). 然后求 C_t 的逆矩阵.

按照式 (8) 迭代,直到满足精度要求为止. 在 $t = 100$ 加入控制,当 a 为 3.260 26 时,使系统控制至周期 4 轨道,此时两家厂商的平均产出水平都是 0.586 8,广告收益为 0.509 4. 随着市场波动的加剧,厂商的产出水平及广告收益均有下降(相对于不动点 I).

由于寡头竞争市场总是在有序和无序之间转换,因此研究系统在混沌态和周期轨道间的转换是必要的. 在 $t = 50$ 时加入控制,使系统稳定在周期 3 轨道,此时两家厂商的平均产出水平都是 0.646 5,平均广告收益为 0.650 5, $t = 200$ 时取消控制,系统重又进入混沌,然后在 $t = 300$ 时,再加入控制,使系统稳定至周期 2 轨道,此时两家厂商的平均产出水平提高为 0.761 8,平均广告收益为 0.840 0,系统性态得到了改善.

2 结 论

企业的广告行为引起寡头竞争市场不稳定时,可通过调节广告费用来稳定市场. 当广告竞争白热化而使系统进入混沌运行以后,广告支出的微小调节将导致系统性态的极大改变,而且如果控制力度较大,反而会延长获得控制的时间. 这说明,由混沌系统对参数调节的敏感特性所决定,企业要尽快达到稳定市场的目的所采取的控制力度要适当,否则可能事与愿违. 考虑到寡头竞争市场的波动性及市场在有序和无序之间交替,还实现了对系统多周期轨道的控制及在混沌态与不同周期轨道间的转换,从而有效地改善了系统的性态.

参考文献:

[1] 姚洪兴,盛昭瀚. 一类经济混沌模型控制方法的研究[J]. 管理科学学报, 2001 (4): 16—21.

[2] AGIZA H N. On the analysis of stability, bifurcation, chaos and chaos control of Kopel map[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1999, 10 (11): 1909—1916.

[3] AHMED E, AGIZA H N, HASSAN S Z. On modelling advertisement in cournot duopoly[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1999, 10 (7): 1179—1184.

[4] ANTONIOU I, BASIOS V, BOSCO F. Absolute controllability condition for probabilistic control of chaos[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, 8 (2): 409.

Study on duopoly model for chaos control of competition in advertisement with parameter regulating feedback

TONG Ji-xin¹, PEI Ming², LI Yu³

(1. Business School, Hohai Univ., Nanjing 210098, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Henan Univ., Kaifeng 475001, China;
3. School of Management Science and Engineering, Nanjing Univ., Nanjing 210093, China)

Abstract: A Kopel duopoly model for competition in advertisement is developed, and it is found that the advertising behavior of enterprises may result in the instability or even chaos of the market. So, the probabilistic dynamic system method is firstly adopted to find out a reasonable regulating scope of cost in advertisement, within which the instability and chaos of the market can be effectively controlled. Then, by use of the parameter regulating feedback method, the multi-periodical orbit control of the model and the conversion of the system between the chaos state and orbits of different periods are realized, and the properties of the system can be effectively improved. The research also shows that, in fiery competition, a little variation of investment in advertisement may result in great changes in the performance of the system.

Key words: duopoly; competition in advertisement; parameter regulation; chaos control