

无单元法形函数及非凸区权函数影响域的研究

孟闻远 卓家寿 邵国建

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 构造了新的无单元形函数,通过 Taylor 展开理论,实现无单元形函数的高阶连续性;用 Shepard 插值,实现移动最小二乘技术中的“从局部到整体的移动性”及有限元方法中的“过点插值性”。将这两种基本理论有机结合,借助于高斯积分技术,构造了易于本质边界条件处理且避免大量求逆运算的新型函数。在非凸边界区域影响域的处理,克服了目前几种处理方法的缺点,建立了简便有效的新准则——弧弦准则。

关键词 无单元;插值形函数;影响域;非凸边界;不连续边界

中图分类号 O343 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2004)03-0358-05

以移动最小二乘技术构造形函数的无单元法^[1,2]中存在着“不过点插值的现象”以及确定形函数系数时存在着繁重不堪的求逆矩阵问题,文献[3]通过用奇异权函数实现插值效果,以解决边界处理问题,用基函数正交化来减轻计算量,但效果不好。人们试图通过各种办法来近似处理本质边界条件^[2],如 Lagrange 乘子法,修正的 Lagrange 乘子法,无单元与有限元的混合法,甚至结合边界配点法等。但这些方法无法从根本上解决本质边界处理问题, Lagrange 乘子法增加了许多额外未知量,修正 Lagrange 乘子法减少了未知量,但因其物理量难以确定而使边界失真,配点法本身就存在精度问题。鉴于此,本文重点解决本质边界条件处理及太多求逆运算问题;目前的无单元法中,处理奇异、非凸边界附近的点所对应权函数影响域的措施也需改进。很显然这些区域属敏感区域,点与点之间是否相互影响异常重要。目前的方法有 3 种^[3]:可视性准则、衍射准则、透明准则。但这些准则各有缺点,本文提出一种简单、明了、比较合理的准则,姑且称作弧弦准则。

1 新的无单元形函数的重构

1.1 移动插值技术的继承

移动最小二乘“插值”技术虽然不易实现,却给了重要的提示:局部紧支集上的奇异权函数具有“移动插值”功能。若继承这种技术且避免求逆运算,将会减少工作量且实现“插值”性质。本文继承 Shepard 插值函数的“移动”、“局部”、“插值”的性质,精心构造出易于边界处理、避免求逆运算的新型函数。

1.2 泰勒展开理论的应用

用 Shepard 函数无法构造高阶的完备多项式,仅有 C^0 阶连续性。为此,借助泰勒多项式基把多项式高阶基函数构造出来,或者说把 Shepard 插值看作 0 阶基函数的插值成分,而 1 阶以上的基函数,由泰勒展开中的多项式基来完成。本文以二维情况为例,一维、三维分别由二维退化和扩展。

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{(k+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (1)$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0, y_0) = \sum_{r=0}^p C_p^r h^{p-r} k^r \frac{\partial^p f(x_0, y_0)}{\partial x^{p-r} \partial y^r}$$
$$h = x - x_0 \quad k = y - y_0$$

基于无单元法^[4~12](如无单元伽辽金法等)需要在(与插值函数无关的)积分背景网格内的高斯积分点

上进行. 所以 对图 1 中积分网格内的任意点 x 将 Taylor 公式在高斯积分点 (x_0, y_0) 上展开. 并用 Shepard 逼近:

$$f(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^N \phi_i^0 f_i \quad \frac{\partial^p (x_0, y_0)}{\partial x^{p-r} \partial y^r} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^p \phi_i^0}{\partial x^{p-r} \partial y^r} f_i = \sum_{i=1}^N \phi_{i, x^{p-r} y^r}^0 f_i$$

及

$$(x - x_0)^{p-r} (y - y_0)^r \triangleq \sum_{i=1}^N \phi_i^0 (x - x_i)^{p-r} (y - y_i)^r$$

Shepard 逼近的权函数 $\phi_i^0(r_i)$ 中以 $r_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$ 来度量, 之所以如此是为了用 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 来逼近 $f(x_0, y_0)$ 及其它对应的函数. 那么

$$f(x, y) \triangleq \sum_{i=1}^N \phi_i^0 f_i + \sum_{j=1}^N \phi_j^0 f_j \sum_{i=1}^N \phi_i^0 (x - x_i) + \dots +$$

$$\frac{1}{3!} \sum_{j=1}^N \phi_j^0 f_j \sum_{i=1}^N \phi_i^0 (x - x_i)^3 + \dots \tag{2}$$

一般取 1~4 阶的完备基函数项, 此逼近函数具有如下性质 (a) 移动性, 因 x 为任一点 (b) 局部性, 由 $\phi_i^0(r_i)$ 来实现, 具体 $r_{\max}$ 的确定在文献 [13] 中已有讨论, 不出现奇异方程为准, 兼顾精度与计算工作量, 本文用三角函数类权函数^[3] (c) 插值性, 显然 $f(x_i, y_i) = f_i$ (d) 具有高阶的完备性, 由基矢量实现 $(x - x_i)(y - y_i)(x - x_i)^2(y - y_i)(x - x_i)(y - y_i)^2 \dots$ (e) 计算简便, 直接以 $\{f\}$ 为自变量, 不需要大量求逆运算来决定逼近函数的系数, 求导运算直接对 (x, y) 进行, $\phi_i^0(r_i)$ 中的变量 (x, y) 变成 (x_0, y_0) , 这正吻合了通过高斯点联系离散节点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 的要求. 下面将逼近函数矩阵化:

$$f(x, y) = \Phi_{1 \times N}^T \mathbf{I}_{N \times N} \mathbf{f}_{N \times 1} + \Phi_{1 \times N}^T \Delta \mathbf{m}_{N \times N} \mathbf{f}_{N \times 1} = \mathbf{N}_{1 \times N} \mathbf{f}_{N \times 1}$$

$$\tag{3}$$

$$\Delta \mathbf{m}_{N \times N} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_1)^{p-r} (y - y_1)^r \phi_{N, x^{p-r} y^r}^0 & \dots & \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_2)^{p-r} (y - y_2)^r \phi_{N, x^{p-r} y^r}^0 \\ \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_3)^{p-r} (y - y_3)^r \phi_{N, x^{p-r} y^r}^0 & \dots & \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_N)^{p-r} (y - y_N)^r \phi_{N, x^{p-r} y^r}^0 \\ \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_1)^{p-r} (y - y_1)^r \phi_{1, x^{p-r} y^r}^0 & \dots & \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_2)^{p-r} (y - y_2)^r \phi_{1, x^{p-r} y^r}^0 \\ \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_3)^{p-r} (y - y_3)^r \phi_{1, x^{p-r} y^r}^0 & \dots & \sum_{p=1}^m \frac{1}{p!} \sum_{r=0}^p C_p^r (x - x_N)^{p-r} (y - y_N)^r \phi_{1, x^{p-r} y^r}^0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$\mathbf{N}_{1 \times N} = [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad \dots \quad N_N(x, y)] = \Phi^T \mathbf{I} + \Phi^T \Delta \mathbf{m} \tag{4}$$

$\mathbf{I}$ 为单位矩阵.

显然

$$N_k(x_i, y_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

2 有关物理公式及离散方程的实现

2.1 物理公式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \right\} = [\bar{B}_1 \quad \bar{B}_2 \quad \dots \quad \bar{B}_n]_{3 \times 2N} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{matrix} \right\}_{1 \times 2N}$$

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i, x} & 0 \\ 0 & N_{i, y} \\ N_{i, y} & N_{i, x} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{f}$$

$$\tag{6}$$

$\mathbf{D}$ 由平面应力或平面应变问题而定.

2.2 离散方程

对于边值问题,由 Galerkin 法

$$\int_{\Omega} \Delta_s \delta u \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u \bar{t} d\Gamma = 0 \tag{7}$$

式中: Δ_s ——对称算子; u ——试验函数; b ——体力矢量; t ——边界面力矢量. 将 u, f 代入式(7)则得

$$K_{2N \times 2N} U_{2N \times 1} = f_{2N \times 1} \quad K = \int_{\Omega} \bar{B}^T D \bar{B} d\Omega \quad f = \int_{\Gamma} N^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} N^T b d\Omega \tag{8}$$

积分高斯点取 3×3 , 边界积分用 3 个高斯点. 影响域在非凸域部分的范围按“弦弧准则”. 若用其它坐标表示物理问题, 将 x, y 代换即可, 求导运算及积分微元的变换, 用雅可比阵 J 转换.

3 非凸域附近权函数影响范围的研究

权函数的影响域问题是确定点与点之间是否相互影响及其影响量大小的问题, 这对奇异边界非凸边界附近的场量高梯度变化的状况非常重要. 目前的 3 种准则^[3](可视性准则(visibility criterion)、衍射准则(diffraction criterion)、透明准则(transparency criterion))各有优缺点. 可视准则比较直观, 计算简洁, 但裂缝尖端影响范围不合理, 如图 2 情况的阴影区本应受影响, 却被消去. 衍射准则似乎更合理些, 但在不连续线(面)尖端的场量高梯度变化区, 使高斯积分区域变得复杂化, 且弧状非凸域与 S_1 线、 $S_2(x)$ 线的切点不易确定, x_c 不易求出. 透明准则的有关透明参数 k 难以确定. 由此建议用下列公式来确定:

$$S(x) = \|x - x_I\|_2 + \|\hat{AB} - \overline{AB}\|_2 \tag{9}$$

图 3(a)中: $\hat{AB} = \widehat{ACB}$, 图 3(b)中: $\hat{AB} = |AC| + |BC|$, 图 3(c)中: $\hat{AB} = |AC| + |BC| = 2|AC|$. $\overline{AB}$ 在图 3(a)(b)中都为线段 AB 长, 在图 3(c)中 $\overline{AB} = 0$. 式(9)简单明了, 易于计算, 不用确定其它参数, 影响范围合理, 有衍射、透明准则的优点. 计算效果也比较好, 称其为弦弧准则(arc-string criterion).

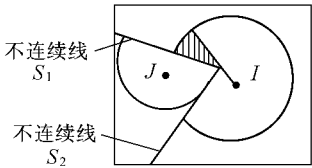


图 2 可视准则不合理示意图
Fig.2 Unreasonableness of visibility criterion

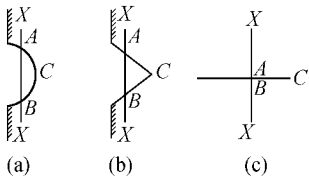


图 3 弦弧准则
Fig.3 Arc-string criterion

4 算 例

例 1 无限大板见图 4, 中间有半径为 a 的圆孔, 在 x 方向受均布力 $q = 1.0 \text{ kPa}$, $E = 10^3 \text{ kPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 取 $1/4$ 部分进行计算, $a = 1.0 \text{ m}$, $L = 5.0 \text{ m}$. 用 4×4 高斯点积分, 边界用 4 个高斯点积分, 取 2 阶与 3 阶完备基函数, 对不同的节点布局进行计算, 结果见图 5.

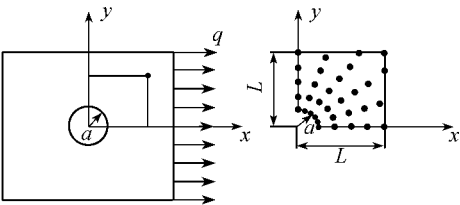


图 4 计算模型
Fig.4 Computation Model

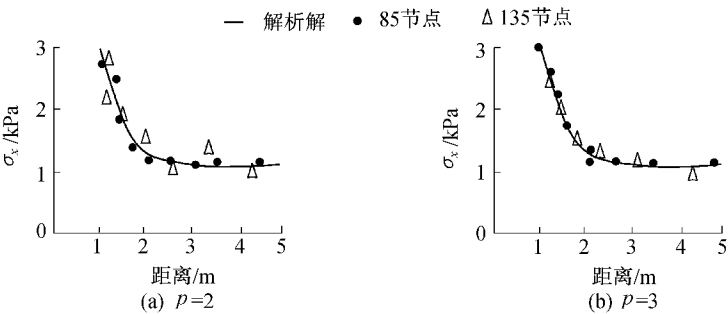


图 5 σ_x 分布
Fig.4 σ_x distribution

例2 受拉薄板边缘有 I 型裂缝 , $a/L = 0.4$,荷载为 q ,如图 6 所示. 由 J 积分计算应力强度因子 $K_I^{[14]}$:

$$J = K_I^2 \frac{1-\mu^2}{E} = \int_{\Gamma} \left(w dy - T \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right)$$

J 积分用 3×3 高斯点. 计算工况 (a) 用 21×11 个规则点布置. (b) 在以裂缝尖端为形心的 $\frac{1}{4}L \times \frac{1}{4}L$ 范围内 ,以 14 20 28 36 个积分点分别计算. (c) 增加多项式的阶数 ,由 2 阶增加为 3 阶. 计算结果见表 1 ,以 $K_I^0 = 2.358^{[12]}$ 进行正规化处理.

例3 复合型裂纹如图7所示. $E = 2.2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$, $h = 1 \text{ m}$, $a = c/2 = 0.2 \text{ m}$. 已知参考引力强度因子为 $K_I^0 = 4 \times 10^4 \sqrt{m} \text{ (Pa)}$; $K_{II}^0 = 0.53 \times 10^4 \sqrt{m} \text{ (Pa)}$. 现用 21×41 节点布置 ,裂纹尖端的区域作为辅助区域 ,有混合型 J 积分^[15,16]公式计算 K_I , K_{II} . 结果如下 :

$$\frac{K_I^0}{K_I} = 0.988 \qquad \frac{K_{II}^0}{K_{II}} = 0.993$$

表 1 K_I/K_I^0 计算结果

Table 1 Calculated result of K_I/K_I^0

多项式阶 p	增加结点数				
	0	14	20	28	36
2	0.974	0.980	0.991	0.995	0.1000
3	0.991	0.998	1.001	1.010	0.1000

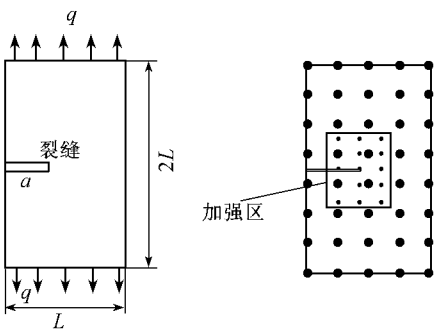


图 6 边界裂缝板计算模型

Fig.6 Computational model of a plate with boundary crack

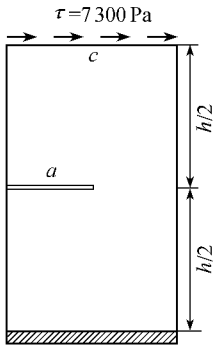


图 7 复合裂纹

Fig.7 Composite crack

5 结 论

算例表明 ,继承“ 移动最小二乘 ”技术构造形函数的合理内涵 .在泰勒展开理论的基础上 ,巧妙利用 Shepard 插值逼近特性形成的具有局部插值性及高阶连续性的优越重构形函数具有如下优点 :

- a. 由于揉合了多种数学技术理论且直接构造形函数 ,计算量大大减少 ,而移动最小二乘法必须进行反复求逆运算 .
- b. 由于具有过点插值性 ,所以本质边界条件的处理像有限元方法一样容易进行 .
- c. 算例表明 ,计算具有很好的稳定性与精确性 ,对边界奇异问题达到了很好的精度 .
- d. 可进行自适应分析 .提高节点的密度(即影响域内节点数目增加)及提高多项式的阶次 p 均可提高精度 .例 2 表明 ,提高 p 效果更好些 .
- e. 对复合型裂纹也达到较好的精度 .

参考文献 :

[1] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. The Astron J ,1977 ,8(12) : 1013—1024.
[2] BELYTSCHKO T. Meshless method : An overview and recent developments[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg , 1996 ,139 3—47.
[3] LANCASTER P. Surfaces generated by moving least squares method[J]. Mathemics of Computation ,1981 ,34 :155.
[4] GORDON R Johnson. SPH for high velocity impact computation[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg ,1996 ,136 347—373.
[5] BELYTSCHKO T. Element-free Galerkin Method[J]. Int J Numer Methods Engrg ,1994 ,134 :229—256.
[6] LU T T. A new implementation of the element free Galerkin method[J]. Ccput Methods Appl Mech Engrg ,1994 ,113 397—414.
[7] HEGON D. EFGM in combination with FE approaches[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg ,1996 ,135 :143—166.
[8] PETR K. EFGM convergence of the continuous and discontinuous shape functions[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg ,1997 ,148 : 257—277.
[9] ODEN J T. A new cloud-based hp finite element method[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg ,1998 ,153 :117—126.

- [10] AMERATUNGA K. Wavelet-Galerkin solution for one-D partial differential equation[J]. Int J Numerical Methods Engrg ,1994 ,37 : 2703—2716.
- [11] KRONGAUZ T. Belytschko enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering ,1996 ,131 :133—145.
- [12] IGOR Kaljevic. An improved element free Galerkin formulation[J]. Int J Numer Methods Engrg ,1997 ,40 :2953—2974.
- [13] BELYTSCHKO T. Element-free Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering ,1994 ,37 :229—256.
- [14] 尹双增. 断裂、损失理论及应用[M]. 北京 :清华大学出版社 ,1992. 58.
- [15] YAU J F ,WANG S S , CROTEN H T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation law of elasticity[J]. J Appl Mech ,1980 ,47 :335—341.
- [16] SHIH C F , ASARO R J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces[J]. J Appl Mech ,1988 ,55 :299—316.

Research on shape function of meshless method and influence domain of weighted function adjacent to nonconvex fields

MENG Wen-yuan , ZHUO Jia-shou , SHAO Guo-jian

(College of Civil Engineering , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract : A new meshless shape function is constructed. The high-order continuity of the meshless shape function is realized by means of the Taylor expansion theory , and the “ moving characteristics from part to whole ” in the moving least square method (MLSM) and the “ interpolating characteristics at nodes ” in the finite element method are also realized by use of the Shepard interpolation. By combination of the above theories and adoption of the Gauss integral technique , a new shape function is established , with which the essential boundary conditions are easily to be treated , and a large amount of inverse matrix calculation is avoided. The new shape function overcomes some disadvantages of other methods currently used in the treatment of the influence domain of the weighted function adjacent to the nonconvex boundary , and a new , simple and effective criterion—the arc-string criterion is developed.

Key words : meshless ; interpolating shape function ; influence domain ; nonconvex boundary ; discontinuous boundary