

风暴潮与天文潮非线性相互作用的理论分析

姜兆敏¹, 王如云², 黄金城¹

(1. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098 ; 2. 河海大学海洋学院, 江苏 南京 210098)

摘要 对一维狭长半封闭水域中的风暴潮与天文潮非线性相互作用问题进行了研究, 并用摄动方法求出了纯风暴潮增水 ζ_S 、天文潮增水 ζ_T 及风暴潮与天文潮非线性相互作用形成的增水 ζ_{ST} 的一阶近似解析表达式. 通过三者表达式的分析, 直观地讨论了浅水效应、非线性效应在风暴潮与天文潮非线性相互作用中的影响. 结果表明, 浅水效应对增水水位起主要作用, 非线性效应对增水的作用取决于波幅与水深比值的量阶.

关键词 风暴潮; 天文潮; 非线性相互作用; 摄动展开

中图分类号 :P731.2 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2004)04- 0447-04

风暴潮与天文潮的非线性相互作用(即耦合效应)是风暴潮理论研究和分析预报的重要问题之一. 在两潮耦合模拟时, 只有采用非线性模式才是合理的. 近几十年来, 国内外有关研究者从非线性角度对两潮耦合做了大量探讨. 早在 20 世纪 50 年代, 国外有关学者就开始了两潮非线性相互作用的研究. 20 世纪 80 年代, Prandle, Wolf^[1]和 Banks^[2]对欧洲北海和泰晤士河口的风暴潮与天文潮的非线性相互作用做了研究. 在国内, 渤海风暴潮与天文潮非线性相互作用问题引起了研究者的注意, 如尹宝树等^[3]对渤海波浪和潮汐风暴潮相互作用对波浪的影响做了数值研究, 张延廷等^[4]应用考虑天文潮和风暴潮的非线性相互作用的联合水位模型对渤海水位和增水进行了数值模拟.

由于风暴潮与天文潮耦合作用的方程是非线性的, 因此想从数学上得出精确的分析解是不可能的, 故通常借助于数值计算进行求解. 然而, 数值计算却由于计算精度、计算稳定性等原因, 可能会导致计算结果产生较大误差. 而运用正则摄动方法, 可以得出简单而又较为准确的近似解, 近似解可以为检验计算方法和计算结果提供依据, 而且从摄动近似解还可以看出各物理参数对解的影响, 有助于弄清原先问题解的解析结构, 这是数值模拟方法所不能比拟的. 应当指出的是, 在研究水动力学小振幅波问题时, 已有一些学者用摄动方法求得了很好的近似解. 如 Zhang^[5]用摄动方法求得了深水不规则波的三阶近似解, 等等. 但国内外在研究风暴潮与天文潮非线性相互作用问题方面, 虽然已有像 Liu 等^[6]对渤海两潮耦合作用的控制方程求得的近似分析解方面的工作, 然而类似的成果却比较少见.

1 基本控制方程及其变换

为了研究风暴潮与天文潮的耦合现象, 必须分析风暴潮与天文潮的非线性相互作用的控制方程. 在一维浅水波方程中, 忽略柯氏力、风应力和气压效应, 保留非线性项, 得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \frac{k}{h} u |u| \quad h = H_0 + \zeta \tag{2}$$

式中: H_0 ——未扰水深; ζ ——潮波自由表面至平均海面的高度; u ——潮流水平方向的速度; g ——重力加速度; k ——底摩擦系数; x ——水平坐标轴; t ——时间.

将方程(1)(2)分别对 t 和 x 求导, 整理后得

收稿日期 2003-08-28
基金项目 国家自然科学基金资助项目(59979004, 50279007)、河海大学科技创新基金资助项目(2001402043)
作者简介 姜兆敏(1977—), 女, 山东临沂人, 硕士研究生, 主要从事物理海洋学方面的研究.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(hu^2 + \frac{1}{2} g \zeta^2 \right) + k \frac{\partial}{\partial x} u |u| \quad (3)$$

其中 $c^2 = gH_0$. 令 $\xi = t + x/c$, $\eta = t - x/c$, 则方程(3)变为

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(4\zeta + \frac{2}{c^2} hu^2 + \frac{\zeta^2}{H_0} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{hu^2}{c^2} + \frac{1}{2H_0} \zeta^2 \right) + \frac{k}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) |u|u \quad (4)$$

2 方程求解

由于控制方程中含有非线性项,使得增水水位 ζ 发生了小扰动,为了从方程(3)中求出 ζ 的解析表达式,将 ζ 按小参数 ϵ ($0 < \epsilon \ll 1$) 摄动展开,即

$$\zeta = \zeta_{(0)} + \zeta_{(1)} + \zeta_{(2)} + \dots \quad (5)$$

这里 $\zeta_{(j)} = O(\epsilon^{j-1}) \zeta_{(0)}$ ($j=1, 2, 3, \dots$).

现在来求方程(3)的一阶 $O(\epsilon)$ 近似解. 将式(5)代入方程(4),为了求解方便,在方程左边保留 $O(1)$ 项和 $O(\epsilon)$ 项,而在方程右边只保留 $O(1)$ 项,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left[4\zeta_{(0)} + \frac{2}{c^2} h_0 u^2 + \frac{\zeta_{(0)}^2}{H_0} + 4\zeta_{(1)} + \frac{2}{c^2} u^2 \zeta_{(1)} + \frac{2}{H_0} \zeta_{(0)} \zeta_{(1)} \right] = \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} h_0 u^2 + \frac{1}{2H_0} \zeta_{(0)}^2 \right) + \frac{k}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) |u|u \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $h_0 = H_0 + \zeta_{(0)}$.

在近海岸水域,波动通常是由入射波与反射波叠加而成的,因此分别用 $F\left[t - \frac{x-a}{c}\right]$ 和 $f\left[t + \frac{x-a}{c}\right]$ 来表示入射波和反射波,那么 $\zeta_{(0)}$ 和 u 为

$$\zeta_{(0)} = F\left(t - \frac{x-a}{c}\right) + f\left(t + \frac{x-a}{c}\right) \quad (7)$$

$$u = \frac{g}{c} \left[F\left(t - \frac{x-a}{c}\right) - f\left(t + \frac{x-a}{c}\right) \right] \quad (8)$$

在海湾顶部 $x=a$ 处,有 $u=0$, 那么 $F(t)=f(t)$, $\zeta_{(0)}=2F(t)$.

将 $\zeta_{(0)}$ 和 u 的表达式代入方程(6),解方程得增水水位 ζ 的一阶近似解析表达式为

$$\begin{aligned} \zeta(t) = 2F(t) + C_0 - R^{-1} \left\{ \frac{F'}{H_0^2} \left[\int_{-\frac{a}{c}}^t F^2(t') dt' + \int_{\frac{a}{c}}^t F^2(t') dt' \right] + \right. \\ \frac{F'}{H_0} \left(1 + \frac{2F}{H_0} \right) \left[\int_{-\frac{a}{c}}^t F(t') dt' + \int_{\frac{a}{c}}^t F(t') dt' \right] + \\ \frac{kc}{H_0^2} \int_{-\frac{a}{c}}^t \left| F\left(t - \frac{a}{c}\right) - F(t') \right| \left[F\left(t - \frac{a}{c}\right) - F(t') \right] dt' - \\ \left. \frac{kc}{H_0^2} \int_{\frac{a}{c}}^t \left| F(t') - F\left(t + \frac{a}{c}\right) \right| \left[F(t') - F\left(t + \frac{a}{c}\right) \right] dt' + 8F + \frac{4F^2}{H_0} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中 F' 是 F 对时间 t 的导数,

$$R = 4 \left(1 + \frac{F}{H_0} \right) \quad (10)$$

在高潮水位发生前,假设 $F(t) > F\left(t - \frac{a}{c}\right)$, $F(t) > F\left(t + \frac{a}{c}\right)$. 当高潮水位发生时, $F'(t)=0$. 那么

$$\begin{aligned} \zeta(t) = 2F(t) + C_0 - R^{-1} \left(8F + \frac{4F^2}{H_0} \right) + \\ R^{-1} \frac{kc}{H_0^2} \left\{ \int_{-\frac{a}{c}}^t \left[F(t') - F\left(t - \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' + \int_{\frac{a}{c}}^t \left[F(t') - F\left(t + \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

3 风暴潮与天文潮非线性相互作用分析

当风暴潮和天文潮从湾口同时进入海湾时,设在海湾顶部 $x=a$ 处

$$F(t) = T(t) + S(t) \quad (12)$$

其中 $T(t)$ 为天文潮, $S(t)$ 为风暴潮.

记 $T(t) = T, S(t) = S$, 当 $\frac{T+S}{H_0} < 1$ 时, 式(10)可展成

$$R^{-1} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{T+S}{H_0} + \left(\frac{T+S}{H_0} \right)^2 + \dots \right] \quad (13)$$

假设高潮水位到来时 $S(t) > S\left(t - \frac{a}{c}\right), S(t) > S\left(t + \frac{a}{c}\right), T(t) > T\left(t - \frac{a}{c}\right), T(t) > T\left(t + \frac{a}{c}\right)$. 将式(12)(13)代入最大增水水位近似解析表达式(11), 可以得到海湾顶部 $x = a$ 处的联合最大增水水位表达式 $\zeta_{T+S}(t)$. 这里

$$\zeta_{T+S}(t) = \zeta_S(t) + \zeta_T(t) + \zeta_{ST}(t)$$

式中: ζ_S ——纯风暴潮增水; ζ_T ——天文潮增水; ζ_{ST} ——风暴潮与天文潮非线性相互作用形成的增水,

$$\begin{aligned} \zeta_S = & \frac{S^2}{H_0^2} (H_0 + S) + \frac{kc}{4H_0^2} \left(1 - \frac{S}{H_0} \right) \left\{ \int_{-\frac{a}{c}}^t \left[S - S\left(t - \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' + \right. \\ & \left. \int_{\frac{a}{c}}^t \left[S - S\left(t + \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \zeta_T = & \frac{T^2}{H_0^2} (H_0 + T) + \frac{kc}{4H_0^2} \left(1 - \frac{T}{H_0} \right) \left\{ \int_{-\frac{a}{c}}^t \left[T - T\left(t - \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' + \right. \\ & \left. \int_{\frac{a}{c}}^t \left[T - T\left(t + \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{ST} = & \frac{ST}{H_0^2} [(H_0 + T) + (H_0 + S)] + \frac{kc}{2H_0^2} \left(1 - \frac{T+S}{H_0} \right) \left\{ \int_{-\frac{a}{c}}^t \left[T - \right. \right. \\ & \left. \left. T\left(t - \frac{a}{c}\right) \right] \left[S - S\left(t - \frac{a}{c}\right) \right] dt' + \right. \\ & \left. \int_{\frac{a}{c}}^t \left[T - T\left(t + \frac{a}{c}\right) \right] \left[S - S\left(t + \frac{a}{c}\right) \right] dt' \right\} - \\ & \frac{kc}{4H_0^3} \left\{ S \left[\int_{-\frac{a}{c}}^t \left[T - T\left(t - \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{\frac{a}{c}}^t \left[T - T\left(t + \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' \right] + T \left[\int_{-\frac{a}{c}}^t \left[S - S\left(t - \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' + \int_{\frac{a}{c}}^t \left[S - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. S\left(t + \frac{a}{c}\right) \right]^2 dt' \right] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

4 结 论

4.1 浅水效应

从纯风暴潮增水水位 ζ_S 、天文潮增水水位 ζ_T 及风暴潮与天文潮非线性相互作用形成的增水 ζ_{ST} 的近似解析表达式可以很直观地看出, 当波幅与水深为同阶量时, 含浅水效应因子 $H_0 + S$ 和 $H_0 + T$ 的浅水项对增水水位起了主要作用.

4.2 非线性效应

从风暴潮与天文潮非线性相互作用形成的增水 ζ_{ST} 的近似解析表达式中可以看出: 增水水位与平均水深 H_0 成反比, 当 $H_0 \rightarrow \infty$ 时, $\zeta_{ST} \rightarrow 0$; 当 $H_0 \rightarrow 0$ 时, $\zeta_{ST} \rightarrow \infty$. 这说明, 在浅海中, 非线性效应最为显著.

非线性底摩擦项是动力方程中惟一的能量耗散项, ζ_S, ζ_T 和 ζ_{ST} 的近似解析表达式表明, 增水水位与底摩擦系数呈线性关系. 当波幅与水深为同阶量时, 非线性底摩擦效应作用非常大, 可使增水水位高值变小, 从而可减小增水幅度; 而当波幅远小于水深时, 非线性底摩擦项对增水水位的作用非常小, 可以略去.

参考文献:

- [1] PRANDLE D ,WOLF J. The interaction of surge and tide in the North Sea and River Thames[J]. Geophy J R Soc ,1978 ,55(1):203—216.
- [2] BANKS J E. A mathematical model of a river-shallow sea system used to investigate tide ,surge and their interaction in Thames-Southern North Sea Region[J]. Phil Trans R Soc Lond ,1974 ,275 :567—609.
- [3] 尹宝树 ,王涛 ,侯一筠. 渤海波浪和潮汐风暴潮相互作用对波浪影响的数值研究[J]. 海洋与湖沼 ,2001 ,32(1):109—116.
- [4] 张延廷 ,王以娇. 渤海天文潮与风暴潮耦合作用的数值模拟[J]. 海洋学报 ,1989 ,12(4):426—431.
- [5] ZHANG Jun ,CHEN Lian-xiang. General third-ocean solution for irregular waves in deep water[J]. Journal of Engineering Mechanics ,1999 ,125(7):768—779.
- [6] LIU Feng-shu ,DING Wen-lan. A preliminary study of interaction between astronomical tides and storm surges[A]. In : Storm Surges : Observations and Modelling[C]. 北京 :海洋出版社 ,1986. 17—33.

Nonlinear interaction between storm surges and astronomical tides

JIANG Zhao-min¹ , WANG Ru-yun² , HUANG Jin-cheng¹

(1. College of Sciences , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;

2. College of Ocean , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China)

Abstract: A perturbation analysis was performed to solve the one-dimensional nonlinear equation of the interaction between storm surges and astronomical tides in a long and narrow semi-closed sea region. The one-order approximate analytical expressions for the set-up of pure storm surges ζ_S , the set-up of astronomical tides ζ_T and the set-up of ζ_{ST} induced by nonlinear interaction between storm surges and astronomical tides were derived. From the analysis of the expressions , it is concluded that the shallow water effect and the nonlinear effect play different roles in the nonlinear interaction between storm surges and astronomical tides , that the set-up water level is mainly affected by the shallow water effect , and that the contribution of the nonlinear effect to the set-up water level depends on the order of the ratio of wave amplitude to water depth.

Key words: storm surge ; astronomical tide ; nonlinear interaction ; perturbation method