

弹性直桩在水平力作用下的数值解

李骥元

(广州建港工程公司 , 广东 广州 510220)

摘要 : 用样条函数法解得一个 4 阶常微分方程的非线性数值解. 该解可用于任何地质条件下弹性直桩水平变位及桩身内力的计算. 实例计算表明 , 无论地面下桩身计算结点取多少 , 计算结果均具有一定的稳定性.

关键词 弹性直桩 地基水平反力系数 水平变位 内力

中图分类号 : TU473.1 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-1980(2004)04-0451-04

弹性直桩在水平力作用下的计算理论为 1930 年美国张有龄教授提出的一个 4 阶常微分方程

$$EIy^{(4)}(x) + bKy(x) = 0 \tag{1}$$

式中 : EI ——桩的抗弯刚度 $kN \cdot m^2$; b ——桩身宽或桩径 m ; $y(x)$ ——弹性直桩在地面以下的弹性曲线(即桩身水平位移) ; K ——随地基深度变化的地基水平反力系数 kN/m^3 .

目前 , 根据地基水平反力系数随桩深变化的不同假定 , 式(1)的求解方法有常数法、 m 法、 C 法、 K 法等. 本文用样条函数法^[1]求得式(1)的非线性数值解. 该解可用于工程上遇到的各种复杂地质条件下弹性直桩变位及内力的计算 , 并且可免去各种假设 , 尽量与实际地质情况相一致.

1 基本方程

设桩底端(桩尖)处的单位宽度地基水平反力系数为 E_{so} , $E_s = bE_{so}$, $K = E_{so}q(x)$, 其中 $q(x)$ 为从地面到桩尖处地基随深度变化的某函数 , 并有 $q(x) \geq 0$, 且当 $x = d$ (桩底端入土深度) 时 , $q(x) = 1$ (即 $K_d = E_{so}$). 将式(1)等号两边同除以 EI , 并令 $\beta = (E_s/4EI)^{1/4}$, 代入式(1)得

$$y^{(4)}(x) + 4\beta^4 q(x)y(x) = 0 \tag{2}$$

直桩在地面以下(因地面以上桩身水平作用力引起的)由弹性水平变位而形成的地基水平反力分布 , 可看作是作用在一根梁(桩)上的非均布反力 , 梁(桩)的挠度曲线可定义为一个 6 阶广义微分方程

$$y^{(5+1)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \delta(x - x_i) \tag{3}$$

式中 : $\delta(x - x_i)$ ——单位跳跃函数 , 可描述突变现象 , 记为 $(x - x_i)_+$; x_i ——结点 ; β_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N-1$)——待定系数. 将地面以下桩身长度分为 N 段(见图 1) , 从地面到桩底端共有 $N+1$ 个结点 , 每个结点处有一地基水平反力. 将式(3)积分 6 次 , 得到 5 次样条函数解的一般表达式

$$y(x) = \sum_{i=0}^5 a_i x^i / i! + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i (x - x_i)_+^5 / 5! \tag{4}$$

式中 β_i 和 a_i 为一系列未知待定系数. 式(4)可改写为

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 / 2 + a_3 x^3 / 6 + a_4 x^4 / 24 + \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i (x - x_i)_+^5 / 120 \tag{4-a}$$

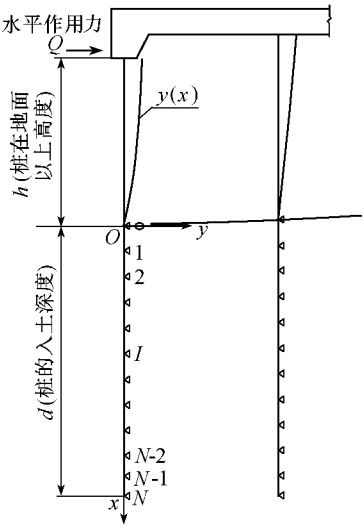


图 1 桩身结点示意图
Fig.1 Joints on piles

对式(4-a)分别求 1 2 3 4 阶导数,并令 $e = a_0$, $f = a_1$, $g = a_2$, $j = a_3$, $k = a_4$, $\eta_i = \beta_i$, 得

$$y(x) = e + fx + gx^2/2 + jx^3/6 + kx^4/24 + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i (x - x_i)_+^5 / 120 \quad (4-b)$$

$$y^{(1)}(x) = f + gx + jx^2/2 + kx^3/6 + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i (x - x_i)_+^4 / 24 \quad (4-c)$$

$$y^{(2)}(x) = g + jx + kx^2/2 + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i (x - x_i)_+^3 / 6 \quad (4-d)$$

$$y^{(3)}(x) = j + kx + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i (x - x_i)_+^2 / 2 \quad (4-e)$$

$$y^{(4)}(x) = k + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i (x - x_i)_+ \quad (4-f)$$

式(4-b)~(4-f)为求解式(2)提供了一个数值解的多项式方程组.但是,要求解式(2)尚需 4 个边界条件.下面分别对桩顶为固端和自由或铰接两种情况进行说明.

2 桩顶端嵌固时的情况

2.1 方程(2)的数值解

此时,在地面处桩身的转角可从地面以上桩身段推导出

$$y^{(1)}(0) = (M_0 + Qh/2)h/(EI)$$

式中: M_0 ——地面处桩身弯矩; Q ——地面上桩顶水平推力; h ——桩顶至地面的高度.由式(4-c)可知

$y^{(1)}(0) = f$, 由式(4-d)可得 $y^{(2)}(0) = g$, 而 $M_0 = EIy^{(2)}(0)$. 经整理, 地面处的桩身转角为

$$f = hg + Qh^2/(2EI) \quad (5)$$

地面处桩身剪力为 $EIy^{(3)}(0) = -Q$, 由式(4-e)得 $y^{(3)}(0) = j$. 因此, 有

$$j = -Q/(EI) \quad (6)$$

在桩底端(即 $x = d$)时,可能出现 4 种状态: (a) $y(d) = 0$ (b) $y^{(1)}(d) = 0$ (c) $y^{(2)}(d) = 0$ (d) $y^{(3)}(d) = 0$. 由于在求解方程(2)时只需 4 个边界条件——地面 2 个及桩底端 2 个, 地面处已有式(5)(6), 因此, 只需从 4 种可能出现的状态中任选 2 种即可.

当 $x = 0$ 时, 从式(4-b)及(4-f)可得到 $y(0) = e$ 及 $y^{(4)}(0) = k$, 代入式(2)便得 $k = -4\alpha\beta^4 q(0)$.

当 $x > 0$ 时, 将式(4-b)及(4-f)代入式(2), 整理移项后得

$$d[1 - q(0)/q(x) - \beta^4 q(0)x^4/6] + g(hx + x^2/2) + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i [(x - x_i)_+^5 / 120 + (x - x_i)_+ / (4\beta^4 q(x))] = (x^3 - 3h^2x)Q/(6EI) \quad (7)$$

令 $e = ud^5$, $g = vd^3$, $h = rd$, $H = Q/(6EId^2)$, $D_b = (d\beta)^4$, 对桩身第 I 个结点, 记 $x_I = x(I)$, 式(7)可改写为

$$[1 - q(0)/q(x_I) - D_b q(0)(x_I/d)^4/6]u + [r(x_I/d) + (x_I/d)^2/2]v + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i [(x_I - x_i)/d]^5 / 120 + [(x_I - x_i)/d] / (4D_b q(x_I)) = [(x_I/d)^3 + 3r^2(x_I/d)]H \quad (8)$$

式(8)包含 N 个方程式(从 $I = 0 \sim I = N - 1$), 其中 u , v , η_i 为 $(N + 2)$ 个待定系数, 因此, 尚需补充 2 个多项式方程才能求解.

当 $x_I = d$ 时, 将桩底端边界条件 $y(d) = \alpha$ (桩底端水平位移等于 0)代入式(4-b), 可得

$$[1 - D_b q(0)/6]u + (2r + 1)v/2 + \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i [(x_I - x_i)/d]^5 / 120 = (1 - 3r^2)H \quad (9)$$

也可将桩底端边界条件 $y^{(1)}(d) = 0$, $y^{(2)}(d) = 0$, $y^{(3)}(d) = 0$ 分别依次代入式(4-b), 可得

$$[2D_b q(0)/3]u - (r + 1)v - \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i [(x_I - x_i)/d]^4 / 24 = 3(r^2 - 1)H \quad (10)$$

$$2D_b q(0)u - v - \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i [(x_I - x_i)/d]^3 / 6 = -6H \quad (11)$$

$$4D_b q(0)u - \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(x_l - x_i)/d] \bar{I}_+ / 2 = -6H \quad (12)$$

现仅需从式(9)~(12)4式中任选2式补充式(8),便可求出 u , v 及 η_i 共 $N+2$ 个未知待定系数.式(9)~(12)代表了可能出现的4种桩端边界条件而分别推导出的多项式方程,共有6种两两选取的组合方式.

2.2 桩身弹性变位及其内力

对桩身第 l 个结点,记 $d_l = x_l/d$, $d_i = x_i/d$,从式(4-b)可得桩身的水平变位、弯矩和剪力,即

$$y(x_l) = [1 - D_b q(0)d_l^4/6]u + (rd_l + d_l^2/2)v - Hd_l^3 - \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(d_l - d_i) \bar{I}_+ / 120] d^5$$

$$M(x_l) = EI y^{(2)}(x_l) = [-2uD_b q(0)d_l^2 + v - 6Hd_l + \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(d_l - d_i) \bar{I}_+ / 6]EI d^3$$

$$Q(x_l) = EI y^{(3)}(x_l) = [-4uD_b q(0)d_l - 6H + \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(d_l - d_i) \bar{I}_+ / 2]EI d^2$$

当 $x_l=0$ (即地面处)时,可得 $y(0)=ud^5$, $M_0=EI y^{(2)}(0)=Elg=vd^3EI$, $Q_0=EI y^{(3)}(0)=Elj=-6d^2HEI$.在桩顶处,将 $x=-h$ 代入式(4-b)得桩顶位移(对桩顶而言,等式右边最后两项等于0)

$$y_t = y(-h) = (u - vr^2/2 - 2r^3H)d^5$$

桩顶弯矩为 $M_t = M_0 + Qh$,将 $M_0 = vd^3EI$, $Q = 6EId^2H$, $h = rd$ 代入得 $M_t = (v + 6rH)EId^3$.

3 桩顶端自由或铰接时的情况

3.1 方程(2)的数值解

直桩在地面处的边界条件应为

$$EI y^{(2)}(0) = -Qh \quad EI y^{(3)}(0) = -Q$$

从式(4-d)(4-e)可得 $y^{(2)}(0)=g$ 及 $y^{(3)}(0)=j$,因此有

$$g = -Qh/(EI) \quad j = -Q/(EI)$$

可以看出,只需将式(5)改为 $g = -Qh/(EI)$,式(6)保持不变,类似桩顶端为嵌固的情况,可推导出多项式方程组

$$\begin{cases} [1 - q(0)/q(x_l) - D_b q(0)(x_l/d)^4/6]u + (x_l/d)v + \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(x_l - x_i)/d] \bar{I}_+ / 120 + [(x_l - x_i)/d]_+ (4D_b q(x_l)) = [(x_l/d)^3 + 3r^2(x_l/d)]H \\ [1 - D_b q(0)/6]u + v + \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(x_l - x_i)/d] \bar{I}_+ / 120 = (3r + 1)H \\ [2D_b q(0)/3]u - v - \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(x_l - x_i)/d] \bar{I}_+ / 24 = -3(2r + 1)H \\ 2D_b q(0)u - \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(x_l - x_i)/d] \bar{I}_+ / 6 = -6(r + 1)H \\ 4D_b q(0)u - \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(x_l - x_i)/d] \bar{I}_+ / 2 = -6H \end{cases} \quad (13)$$

3.2 桩身弹性变位及其内力

地面以下桩身第 l 个结点处的水平位移及内力为

$$y(x_l) = [1 - D_b q(0)d_l^4/6]u + dlv - 3rd_l^2 - d_l^3 - \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(d_l - d_i) \bar{I}_+ / 120] d^5 H$$

$$M(x_l) = [D_b q(0)d_l^2 u + 3(r + d_l) + 10 \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(d_l - d_i) \bar{I}_+ / 3] r d^3 / 3$$

$$Q(x_l) = [-1 - 2D_b q(0)d_l]u + 10 \sum_{i=0}^{N-1} \eta [(d_l - d_i) \bar{I}_+ / 6] EI d^2 H$$

地面以上桩顶处水平位移为 $y_t = (u - vr - 2r^3)d^5 H$,弯矩为 $M_t = 0$.地面处有 $y_0 = ud^5 H$, $M_0 = rdH$, $Q_0 = -6EId^2 H$.

4 计算实例

4.1 弹性长桩

以直(管)桩多排架码头为例(见图2), 码头前方由5根1.2m直径钢筋混凝土管桩组成一个排架, 桩顶可看作是嵌固于码头横梁顶部, 桩的抗弯刚度为 $EI = 2.3163875 \times 10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, 管壁厚0.13m, 承受的船舶水平荷载分配在每个排架上为250kN, 桩端地基水平反力系数取 $E_{so} = 1500 N_s(d)$, $N_s(d)$ 为桩端地层的标准贯入击数。地面以下桩身计算结点数取13~

14个。按地表面有无砂石覆盖层及桩尖处风化岩层 $N_s(d) = 50$ 和604种不同地质状况进行计算(见图2), 每一种地质状况下都按6种桩端可能出现的边界组合条件计算。

计算结果表明, 6种不同的桩端边界条件下桩顶的水平位移和内力大小都很接近。这说明, 此时码头的管桩入土较深, 已达到长桩的入土效果要求, 桩底端应属嵌固状态。

4.2 弹性短桩

如果对图2中码头地基做些变化——将风化岩层面提高10m, 地面处不设置砂石覆盖层, 桩尖只到达贯入击数为50的岩层前, 桩身计算结点数取8个, 则桩顶位移和内力的计算结果在6种不同的桩底端边界条件下出入较大。此时, 应按桩底端属端支承的状态, 即桩底端应属铰接状态——桩底端位移等于 $\alpha_y(d) = 0$ 和弯矩等于 $\alpha_y^{(2)}(d) = 0$ 。计算结果比较符合实际。正是由于码头管桩入土较浅而出现了短桩的情况。

5 结 语

- a. 任何单一或复杂地质条件下的直桩桩基都可以用本文提出的非线性数值解法进行计算, 而且不用提出像以往解法中所做的那些会与实际工程地质情况有所出入的假设, 因此本文数值解法能更贴近工程实际。
- b. 本文数值解法能自动判别所计算的直桩特征——长桩还是短桩。如在用6种不同的桩端边界条件进行计算时, 若桩顶水平位移和内力值的大小彼此接近, 则是长桩, 否则即为短桩。
- c. 地面以下桩身计算结点的多少, 一般不会给计算结果造成显著影响。如对本文所述长桩进行计算时, 若将桩身结点数从13~14个(用平均内插)增加到25~27个, 计算结果相差不大。这说明计算具有稳定性。

参考文献:

[1] 李岳生, 刘东旭. 样条函数方程[M]. 北京: 科学出版社, 1979. 1—21.

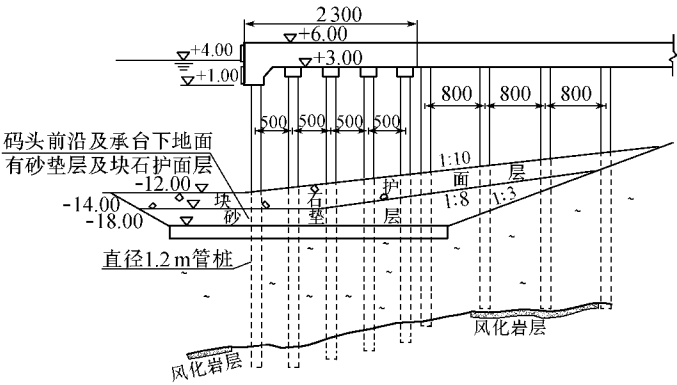


图2 钢筋混凝土管桩码头断面
Fig.2 Profile of wharf with reinforced concrete pipe piles

Numerical solution to elastic vertical piles under action of horizontal forces

LI Ji-yuan

(Guangzhou Jiangang Engineering Company, Guangzhou 510220, China)

Abstract :A non-linear numerical solution to a fourth-order ordinary differential equation was obtained by use of the spline method, which could be used to calculate the horizontal deflection and internal force of elastic vertical piles under any geological condition. Case study showed that the calculated result is of certain stability no matter how many nodes on piles under ground surface were selected for calculation.

Key words :elastic vertical piles; coefficient of horizontal reaction force of foundation; horizontal deflection; internal force