

基于区间数的多级模糊优选模型

段宝彬

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :以区间数表示模糊集的相对隶属度 ,引入相对优势度对区间数的大小进行比较 ,建立一个多级模糊优选模型 ,解决了由于相对隶属度求解方法不同而导致方案优选中评价结果不一致的问题。
关键词 :模糊优选 ;相对隶属度 ;区间数 ;相对优势度
中图分类号 :O159 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2004)04-0478-03

长期以来 ,模糊集合论由于其隶属度以及隶属函数的确定比较困难 ,主观随意性大 ,在很大程度上影响了其在应用领域的发展 .由于方案的优选具有比较上的相对性 ,文献 [1] 提出了模糊优选模型 .由于该模型以相对隶属度和相对隶属函数为基础 ,不必求出绝对隶属度和隶属函数就可对方案进行优选 ,因而在经济管理和工程实践中获得了广泛应用^[1~3] .文献 [2] 引入影响度因子的概念 ,改进了相对隶属度的计算方法 ,使得优选的结果更为客观 ,但实际应用中影响度因子大小的确定不太容易操作 .文献 [4] 通过定义相对优势度来刻画区间数 ,使得对区间数的描述和大小的比较更为精细 .本文在上述研究成果的基础上 ,建立一个基于区间数的多级模糊优选模型 ,以使方案优选的结果更为客观 .

1 基于区间数的单层次多级模糊优选模型

设 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是 n 个方案组成的方案集 ,每个方案的评价指标有 m 个 ,则有系统特征值矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

设各指标的权重分别为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ 且满足 $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1, \omega_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$,方案 X_j 关于指标 i 的相对隶属度 $r_{ij} = [r_{ij}^-, r_{ij}^+]$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) ,且 $r_{ij}^- = \min\{r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj}\}, r_{ij}^+ = \max\{r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj}\}$,其中 $r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj}$ 分别为用 k 种不同方法根据系统特征值矩阵 A 计算得到的相对隶属度 ,于是可得到相对隶属度矩阵 $R^- = (r_{ij}^-)_{m \times n}, R^+ = (r_{ij}^+)_{m \times n}$.根据 m 个指标可以把方案按优劣程度从劣级到优级分 c 个级别 ($h = 1$,对应于劣级方案 ; $h = c$,对应于优级方案) .设在 $r_{ij} = r_{ij}^-$ 时方案 X_j 属于级别 h 的隶属度为 u_{hj}^- ,在 $r_{ij} = r_{ij}^+$ 时方案 X_j 属于级别 h 的隶属度为 u_{hj}^+ ($h = 1, 2, \dots, c; j = 1, 2, \dots, n$) ,且满足 $\sum_{h=1}^c u_{hj}^- = 1, \sum_{j=1}^n u_{hj}^- > 0, 0 \leq u_{hj}^- \leq 1, \sum_{h=1}^c u_{hj}^+ = 1, \sum_{j=1}^n u_{hj}^+ > 0, 0 \leq u_{hj}^+ \leq 1$,则有方案属于各级别的隶属度矩阵 $U^- = (u_{hj}^-)_{c \times n}$ 和 $U^+ = (u_{hj}^+)_{c \times n}$.设各指标关于各级别的标准特征值矩阵 $S = [s_{ih}]_{m \times c}$,其中 $s_{ih} = (h - 1) / (c - 1)$,为指标 i 关于级别 h 的标准特征值 ,是从劣级到优级 (从 0 到 1) 按等间隔插值而得到的 .

为了表示方案 X_j 与级别 h 之间的差异 ,定义

$$D_{hj}^- = u_{hj}^- \sqrt{\sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ij}^- - s_{ih})]^2} \quad D_{hj}^+ = u_{hj}^+ \sqrt{\sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ij}^+ - s_{ih})]^2}$$

分别为方案 X_j 与级别 h 的加权广义欧氏最小权距离和加权广义欧氏最大权距离 .

按“方案集中所有方案对各个级别的加权广义欧氏最小权距离平方和以及加权广义欧氏最大权距离平方和最小^[5]”的优化准则建立如下两个目标函数：

$$F^-(u_{hj}^-) = \min \left\{ \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^c (u_{qp}^-)^2 \sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ip}^- - s_{iq})]^2 \right\}$$

(1)

且满足约束条件

$$\sum_{q=1}^c u_{qp}^- = 1 \quad \sum_{p=1}^n u_{qp}^- > 0 \quad 0 \leq u_{qp}^- \leq 1$$

$$F^+(u_{hj}^+) = \min \left\{ \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^c (u_{qp}^+)^2 \sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ip}^+ - s_{iq})]^2 \right\}$$

(2)

且满足约束条件

$$\sum_{q=1}^c u_{qp}^+ = 1 \quad \sum_{p=1}^n u_{qp}^+ > 0 \quad 0 \leq u_{qp}^+ \leq 1$$

由目标函数(1)构造拉格朗日函数：

$$L(u_{hj}^-, \lambda) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^c (u_{qp}^-)^2 \sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ip}^- - s_{iq})]^2 - \lambda \left(\sum_{q=1}^c u_{qp}^- - 1 \right) \quad (h = 1, 2, \dots, c; j = 1, 2, \dots, n)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial u_{hj}^-} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

解得

$$u_{hj}^- = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ij}^- - s_{ih})]^2}{\sum_{q=1}^c \sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ij}^- - s_{iq})]^2} \right\}^{-1} \quad (h = 1, 2, \dots, c; j = 1, 2, \dots, n)$$

同理,由目标函数(2)构造拉格朗日函数可解得

$$u_{hj}^+ = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ij}^+ - s_{ih})]^2}{\sum_{q=1}^c \sum_{i=1}^m [\omega_i (r_{ij}^+ - s_{iq})]^2} \right\}^{-1} \quad (h = 1, 2, \dots, c; j = 1, 2, \dots, n)$$

计算方案 X_j 的级别特征值区间数 H_j 的下限和上限分别为^[5]

$$H_j^- = \sum_{h=1}^c h u_{hj}^- \quad H_j^+ = \sum_{h=1}^c h u_{hj}^+ \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

从而得到方案 X_j 的级别特征值

$$H_j = [H_j^-, H_j^+] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

关于区间数的大小比较和排序问题,目前已有多种方法.这些方法大多引入可能度的概念来对区间数的大小进行两两比较^[6].实际上,利用相对优势度来比较区间数的大小,可以减少数据信息的损失,使得排序的结果更为客观、合理^[4].不过,文献[4]定义的相对优势度对两个区间数均为退化,即区间数上、下限都是同一个实数的情形没有考虑.本文取 $\rho = e$ (自然对数的底数),并对相对优势度的定义进行拓展,使其适应的范围更广.

定义 设 $a = [a^-, a^+]$, $b = [b^-, b^+]$ 是两个任意的区间数,称区间数 $a > b$ 的相对优势度为

$$P(a > b) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2 \exp \left\{ \frac{a^+ - b^-}{a^+ - a^- + b^+ - b^-} - \frac{1}{2} \right\}} & \text{当 } \frac{a^+ - b^-}{a^+ - a^- + b^+ - b^-} \geq \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \frac{1}{2 \exp \left\{ \frac{1}{2} - \frac{a^+ - b^-}{a^+ - a^- + b^+ - b^-} \right\}} & \text{当 } \frac{a^+ - b^-}{a^+ - a^- + b^+ - b^-} < \frac{1}{2} \text{ 时} \\ 1 - \frac{1}{2e^{(a-b)}} & \text{当 } a \text{ 和 } b \text{ 均为退化区间数且 } a \geq b \text{ 时} \\ \frac{1}{2e^{(b-a)}} & \text{当 } a \text{ 和 } b \text{ 均为退化区间数且 } a < b \text{ 时} \end{cases}$$

设 $H_1 = [H_1^-, H_1^+]$, $H_2 = [H_2^-, H_2^+]$, ..., $H_n = [H_n^-, H_n^+]$ 是 n 个方案级别特征值的区间数,用 h_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 表示区间数 $H_i > H_j$ 的相对优势度 $P(H_i > H_j)$,容易验证,以 h_{ij} 为元素的相对优势度判断矩阵^[4]

$H = (h_{ij})_{n \times n}$ 是模糊互补矩阵.

利用文献 [7] 提出的模糊互补矩阵排序的方法可得方案 X_i 的权重值

$$S_i = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{j=1}^n h_{ij} + \frac{n}{2} - 1 \right)$$

将 $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 按从大到小的顺序排列, 即可得到 n 个方案的优劣次序.

2 基于区间数的多层次多级模糊优选模型

在实际进行方案优选时, 往往涉及的指标很多, 而这些指标又可能分别属于不同的层次和类别, 因此对于复杂的优选问题, 通常采用多层次的模糊优选模型. 现将本文的模型推广到 2 个层次的情况, 而 3 个及 3 个以上层次的方案优选问题可依此类推.

基于区间数的 2 层次多级模糊优选模型为: 假设整个系统可分为 m 个子系统, 这 m 个子系统的权重分别为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m_k}$, 且满足 $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$. 对于第 k 个子系统, 设其有 m_k 个指标, 各个指标的权重分别为 ${}_k\omega_1, {}_k\omega_2, \dots, {}_k\omega_{m_k}$, 且满足 $\sum_{i=1}^{m_k} {}_k\omega_i = 1$. 利用单层次的优选模型可得到 n 个方案在第 k 个子系统下的权重值 ${}_kS_i (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$. 在高一层次上, 可把每一子系统视为一个指标, 以 $S = (s_{ki})_{m \times n}$ 作为系统特征值矩阵, 其中 $s_{ki} = {}_kS_i$, 从而可求出 n 个方案在高一层次的权重值 $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

根据 T_i 的大小顺序就可确定出 n 个方案的优劣次序.

3 结 束 语

在模糊优选模型中, 相对隶属度的计算方法不同, 得到的相对隶属度一般也不一样. 不一样的隶属度就会出现对同一方案优劣程度评价不一致的情况. 针对这种情况, 本文把相对隶属度作为区间数来处理, 在此基础上构造多级模糊优选模型, 为相对隶属度和模糊优选模型的进一步研究提供了一种新的思路.

参考文献:

- [1] 陈守煜. 系统模糊决策理论与应用 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1994. 161—307.
- [2] 郝聚民, 纪卓尚, 戴寅生, 等. 多目标模糊优选法及其在船舶主尺度优选中的应用 [J]. 大连理工大学学报, 1998, 38(4): 373—377.
- [3] 黄健元. 模糊集及其应用 [M]. 银川: 宁夏人民教育出版社, 2000. 171—187.
- [4] 张吉军. 区间数的排序方法研究 [J]. 运筹与管理, 2003, 12(3): 18—22.
- [5] 王建明, 陈守煜. 权监督多级模糊优选模型 [J]. 运筹与管理, 2002, 11(3): 1—4.
- [6] 徐泽水, 达庆利. 区间数的排序方法研究 [J]. 系统工程, 2001, 19(6): 94—96.
- [7] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法 [J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311—314.

Interval number-based multiple fuzzy optimization model

DUAN Bao-bin

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: With the interval number reflecting the relative membership degree of fuzzy sets, the relative superiority degree was introduced for comparison of interval numbers, and a multiple fuzzy optimization model was developed, avoiding the different estimated results in optimal selection of schemes caused by different ways for calculating the relative membership degree.

Key words: fuzzy optimal selection; relative membership degree; interval number; relative superiority degree