

考虑水平力作用的改进型文克勒地基模型

周继凯, 杜钦庆

(河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 针对文克勒地基模型不能计算在水平力作用下的弹性地基梁的不足, 提出了改进的文克勒地基模型. 依据文克勒基本假定, 考虑水平力对梁剪力和弯矩产生的影响, 采用位移法推导出弹性地基梁单元劲度矩阵的修正项, 形成可以用于计算承受水平力的弹性地基梁单元劲度矩阵, 并编制了相应的有限元计算程序. 计算表明, 采用本模型计算承受水平力作用的弹性地基梁, 可以进行合理的结构设计.

关键词 文克勒地基 水平力 弹性地基梁 侧向地基系数

中图分类号 :TU471.2

文献标识码 :A

文章编号 :1000-1980(2004)06-0669-05

弹性地基梁广泛存在于港工船坞、轨道地基梁、水工闸板、道桥、工民建地基梁以及支护桩等工程中. 准确合理地弹性地基梁进行计算具有重要的工程意义. 由于地基的力学特性及地基与梁的耦合情况很难精确计算, 100 多年来, 国内外许多专家学者都一直在对地基梁的计算理论和计算方法进行着深入的研究^[1~3]. 地基计算模型先后提出的有文克勒模型、半无限弹性体模型、有限压缩层模型、双参数模型等. 其中文克勒模型为工程界广泛使用, 是一种较好的实用地基模型.

文克勒地基模型由捷克工程师文克勒(Winkler)于 1867 年提出^[4]. 该模型假设地基上任一点所受的压力强度 p 与该点的地基沉降 s 成正比, 如图 1 所示.

$$p = ks \quad (1)$$

式中 k 为基床系数. 该地基模型实质上是地基看作无数分割开的小土柱表现为一根根弹簧组成的一系列各自独立的弹簧体系. 然而, 当存在水平作用力时, 该模型无法解决^[5]. 实际上, 在船坞、水工闸板以及支护桩等工程中, 地基梁轴向力的存在, 使地基梁可能由受弯状态转变为偏心受压状态, 对地基梁的配筋设计影响很大. 解决地基梁承受水平作用力的计算问题具有重要的工程意义. 鉴于此, 笔者提出一种改进的文克勒地基模型.

1 改进的文克勒地基模型

改进的模型关键在于考虑了地基与梁接触面上的切向作用. 基于文克勒地基模型, 在地基与梁接触面上引进一系列各自独立的水平弹簧体系, 用来反映地基的水平约束条件. 假定梁结点发生水平向位移, 则水平向弹簧产生水平力 q . 水平力大小与结点的水平位移 δ 成正比, 如图 2 所示. 地基梁受力状态见图 3.

$$q = k_s \delta$$

式中 k_s 为地基侧向系数, 简称侧向系数.

2 新模型的有限元分析

2.1 计算原理

假定小变形, 荷载与变形成线性关系, 可以应用叠加原理. 在文克勒模型的原计算条件及方法的基础上,

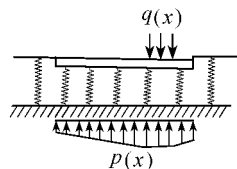


图 1 文克勒地基模型
Fig.1 Winkler foundation model

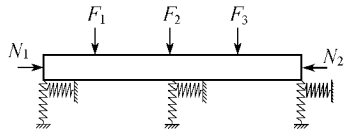


图 2 改进的文克勒地基模型
Fig.2 Modified Winkler foundation model

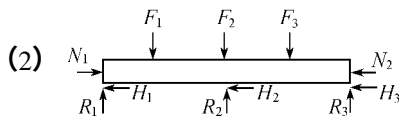


图 3 梁受力状态
Fig.3 State of force bearing beam

叠加梁在轴向力与地基切向力作用影响. 对于这种情况,对导出的弹性曲线微分方程求得解析解通常比较困难,而应用有限元方法计算则比较方便. 有限元法又称结构矩阵位移分析法. 该法将地基梁离散为有限个单元,计算单元劲度矩阵,再根据静力平衡条件求得节点位移和内力^[6].

2.2 文克勒地基梁的单元劲度矩阵 K_1^e

采用结构矩阵位移分析法,可以得到单元内力和单元节点位移之间的关系,以单元劲度矩阵来确定.

$$K_1^e \delta_1^e = F_1^e \tag{3}$$

从弹性地基梁中取一个梁单元(图 4),推导出单元节点力 F_1^e 、节点位移 δ_1^e 和单元劲度矩阵 K_1^e .

$$F_1^e = [M_i, Q_i, M_j, Q_j]^T \tag{4}$$

$$\delta_1^e = [\theta_i, y_i, \theta_j, y_j] \tag{5}$$

$$K_1^e = \frac{2E_h I}{l^3} \begin{bmatrix} l^2 \alpha_1 & & & \\ l \beta_1 & \gamma_1 & & \\ l^2 \alpha_2 & l \beta_2 & l^2 \alpha_1 & \\ -l \beta_2 & -\gamma_2 & -l \beta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中: E_h ——梁材料弹性模量; I ——梁截面惯性矩; K ——基床系数; b ——梁底宽度; M_i, Q_i, M_j, Q_j ——单元 i, j 节点弯矩和剪力; $\theta_i, y_i, \theta_j, y_j$ ——单元 i, j 节点转角和沉降; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ ——计算参数.

令 $A = \cosh \lambda \sinh \lambda - \cos \lambda \sin \lambda, B = \cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda, C = \cosh^2 \lambda - \cos^2 \lambda, D = \sinh^2 \lambda - \sin^2 \lambda$, 则

$$\alpha_1 = \frac{A}{D} \lambda \quad \alpha_2 = \frac{B}{D} \lambda \quad \beta_1 = \frac{C}{D} \lambda^2 \quad \beta_2 = \frac{2 \sinh \lambda \sin \lambda}{D} \lambda^2$$
$$\gamma_1 = 2(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) \quad \gamma_2 = 2(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)$$

此梁单元无法考虑轴向力的影响.

2.3 修正项的推导

由于轴力存在,梁单元有水平位移,地基对梁产生切向力. 水平力对梁端剪力和弯矩产生影响. 考虑这种影响,可以在式(4)和式(5)中引入轴向力和水平位移项,在式(6)中引入劲度矩阵的修正项^[7]. 下面采用位移法推导出此修正项^[8].

2.3.1 梁单元仅在 j 端产生单位水平位移

设梁单元仅在 j 端产生单位水平位移,如图 5 所示.

$$\delta u_i = 0 \quad \delta u_j = 1 \quad \delta v_i = 0 \quad \delta v_j = 0 \quad \delta \theta_i = 0 \quad \delta \theta_j = 0$$

设梁中性轴上各点水平位移 $u(x)$ 为线性分布,即

$$u(x) = x/l$$

根据新模型的假定,在梁底部存在地基切向力 $q(x)$,分布见图 6.

$$q(x) = -k_s x/l$$

对 j 点写出几何方程
$$-N_i \frac{l}{EA} - \int_0^l \frac{1}{2} k_s \frac{x^2}{EA} dx = 1$$

得出 i 点轴力

$$N_i = -\frac{EA}{l} - \frac{1}{6} l k_s$$

对梁单元写出水平向平衡方程

$$-\frac{1}{2} k_s l + N_i + N_j = 0$$

得出 j 点轴力

$$N_j = \frac{EA}{l} + \frac{2}{3} l k_s$$

单元内轴力分布如图 7 所示. 轴力分布为

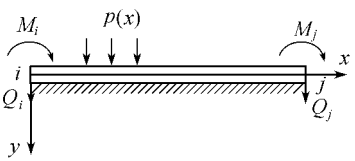


图 4 梁单元
Fig.4 Beam elements

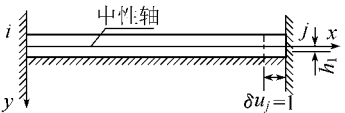


图 5 j 端单位水平位移
Fig.5 Unit horizontal displacement at joint j

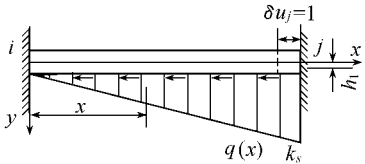


图 6 切向力分布
Fig.6 Tangential force distribution

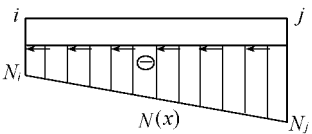


图 7 轴力图
Fig.7 Diagram of axial force

$$N(x) = \frac{EA}{l} + \frac{1}{6}k_s l + \frac{1}{2}k_s x$$

将 i 端解除固端约束,代之以 M_i, N_i, Q_i ,其位移边界条件不变,如图 8 所示.利用 i 结点的位移约束条件列几何方程及平衡方程可解出 M_i, Q_i .

$$\delta u_i = 0 \quad \delta u_j = 1$$

首先,计算梁单元仅在地基切向力作用下(图 6) i 点转角与挠度.由于梁高度 h 较大,必须考虑地基切向力对中性轴弯矩的影响.记 h_1 为中性轴到底面距离,梁单元中性轴各点弯矩为

$$M(x) = -\frac{1}{2}k_s \frac{x^2}{l}h_1$$

梁单元 j 点弯矩为

$$M(l) = -\frac{1}{2}k_s l h_1$$

绘出弯矩图如图 9 所示.由材料力学可知

$$EIU'' = +M(x) = -\frac{1}{2}k_s \frac{x^2}{l}h_1$$

积分得

$$EIU' = -\frac{1}{6}k_s \frac{x^3}{l}h_1 + C_1$$

$$EIU = -\frac{1}{24}k_s \frac{x^4}{l}h_1 + C_1 x + C_2$$

代入边界条件 $x=l, u=0, u'=\theta_j=0$,解得

$$C_1 = \frac{1}{6}k_s l^2 h_1 \quad C_2 = -\frac{1}{8}k_s l^3 h_1$$

于是得到 i 结点的挠度 f_i 和转角 θ_i :

$$f_i = \frac{C_2}{EI} = -\frac{l^3 h_1 k_s}{8EI} \quad \theta_i = \frac{C_1}{EI} = \frac{l^2 h_1 k_s}{6EI}$$

同样,满足 i 端固端约束边界条件,分别计算在 M_e 与 P 作用下的 i 端转角与挠度如下.计算简图如图 10 所示.

在 M_e 作用下,

$$f_{im} = -\frac{M_e l^2}{2EI} \quad \theta_{im} = \frac{M_e l}{EI}$$

在 P 作用下,

$$f_{ip} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \theta_{ip} = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

对 i 点写出几何方程

$$\delta v_i = f_{im} + f_{ip} + f_i = -\frac{M_e l^2}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{l^3 h_1 k_s}{8EI} = 0$$

$$12M_e - 8Pl + 3h_1 l k_s = 0 \tag{7}$$

$$\delta \theta_i = \theta_{im} + \theta_{ip} + \theta_i = \frac{M_e l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{l^2 h_1 k_s}{6EI} = 0$$

$$6M_e - 3Pl + h_1 l k_s = 0 \tag{8}$$

由式(7)与式(8)联解得到

$$P = \frac{1}{2}h_1 k_s \quad M_e = \frac{1}{12}h_1 l k_s \tag{9}$$

解出 i 端的弯矩及剪力:

$$M_i = \frac{1}{12}h_1 l k_s \quad Q_i = \frac{1}{2}h_1 k_s \tag{10}$$

最后由平衡条件 $\sum X = 0, \sum Y = 0$ 解出 j 端的弯矩及剪力:

$$M_j = -M_i = -\frac{1}{12}h_1 l k_s \quad Q_j = -Q_i = -\frac{1}{2}h_1 k_s \tag{11}$$

2.3.2 梁单元仅在 i 端产生单位水平位移

设梁单元仅在 i 端产生单位水平位移,如图 11 所示.边界约束条件为

$$\delta u_i = 1 \quad \delta v_i = 0 \quad \delta \theta_i = 0 \quad \delta u_j = 0 \quad \delta v_j = 0 \quad \delta \theta_j = 0$$

推导同 2.3.1,解得

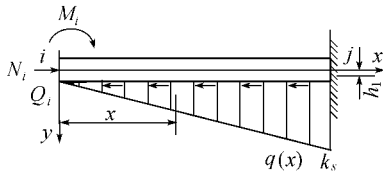


图 8 i 端解除约束

Fig.8 Constraint release at joint i

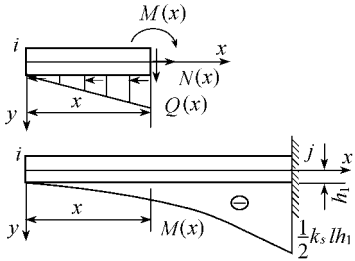


图 9 弯矩图

Fig.9 Bending moment diagram

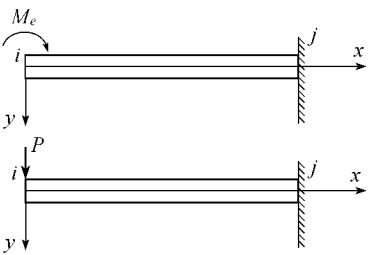
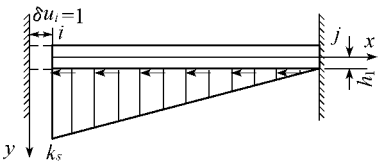


图 10 计算简图

Fig.10 Sketch of calculation

$$\begin{cases} N_i = \frac{EA}{l} + \frac{2}{3}lk_s & Q_i = \frac{1}{2}h_1k_s & M_i = -\frac{1}{12}h_1lk_s \\ N_j = -\frac{EA}{l} - \frac{1}{6}lk_s & Q_j = -\frac{1}{2}h_1k_s & M_j = \frac{1}{12}h_1lk_s \end{cases} \quad (12)$$



2.3.3 形成新模型的单元刚度矩阵

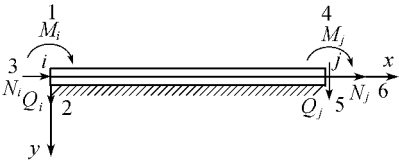
新模型计算单元模式见图 12,单元内力和单元节点位移之间的关系为

$$K_{1n}^e \delta_{1n}^e = F_{1n}^e \quad (13)$$

$$F_{1n}^e = [M_i, Q_i, N_i, M_j, Q_j, N_j]^T \quad (14)$$

$$\delta_{1n}^e = [\theta_i, v_i, u_i, \theta_j, v_j, u_j]^T \quad (15)$$

图 11 i 端单位水平位移
Fig.11 Unit horizontal displacement at joint i



新的刚度矩阵 K_{1n}^e 由文克勒模型单元刚度矩阵叠加上修正项.修正项单元刚度元素 k_{ij} 的具有物理概念,即在单元 j 向有单位位移导致在 i 向产生的杆端力.单元 ij 向编号见图 12.

图 12 新梁单元

Fig.12 New beam element

由对称性可得到刚度矩阵 K_{1n}^e :

$$K_{1n}^e = \begin{bmatrix} l^2\alpha_1 & l\beta_1 & -\frac{1}{12}h_1lk_s & l^2\alpha_2 & -l\beta_2 & \frac{1}{12}h_1lk_s \\ l\beta_1 & \gamma_1 & \frac{1}{2}h_1k_s & l\beta_2 & -\gamma_2 & \frac{1}{2}h_1k_s \\ -\frac{1}{12}h_1lk_s & \frac{1}{2}h_1k_s & \frac{EA}{l} + \frac{2}{3}lk_s & \frac{1}{12}h_1lk_s & -\frac{1}{2}h_1k_s & -\frac{EA}{l} - \frac{1}{6}lk_s \\ l^2\alpha_2 & l\beta_2 & \frac{1}{12}h_1lk_s & l^2\alpha_1 & -l\beta_1 & -\frac{1}{12}h_1lk_s \\ -l\beta_2 & -\gamma_2 & -\frac{1}{2}h_1k_s & -l\beta_1 & \gamma_1 & -\frac{1}{2}h_1k_s \\ \frac{1}{12}h_1lk_s & \frac{1}{2}h_1k_s & -\frac{EA}{l} - \frac{1}{6}lk_s & -\frac{1}{12}h_1lk_s & -\frac{1}{2}h_1k_s & \frac{EA}{l} + \frac{2}{3}lk_s \end{bmatrix} \quad (16)$$

3 计算实例及分析

如图 13 所示弹性地基梁,梁长 $l=16\text{ m}$,截面高 $h=2.2\text{ m}$,宽 $b=1\text{ m}$,弹性模量 $E_h=2.85\times 10^7\text{ kPa}$, $I=0.887\text{ 333 m}^4$, $E_hI=2.528\text{ 9}\times 10^7\text{ kN}\cdot\text{m}^2$,基床系数 $k=30\text{ 000 kN/m}^3$.依据上述推导,编制了考虑水平力作用改进后的文克勒地基模型有限元

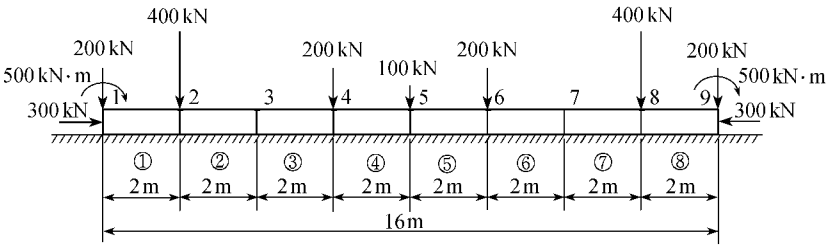


图 13 实例计算图

Fig.13 Sketch of calculation

计算程序.分别取侧向系数 $k_s=0\text{ kN/m}^3,30\text{ 000 kN/m}^3,300\text{ 000 kN/m}^3$,其中 $k_s=0$ 相当于原文克勒地基模型,后两种计算结果可与其进行比较.经计算,将 3 次计算结果列于表 1.由于荷载与结构对称,仅列出前半段截面内力.

表 1 各截面内力计算值

Table 1 Calculated internal forces of each section

地基侧向系数 $k_s/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	截面 1			截面 2			截面 3			截面 4			截面 5		
	Q_1 /kN	M_1 /(kN·m)	N_1 /kN	Q_2 /kN	M_2 /(kN·m)	N_2 /kN	Q_3 /kN	M_3 /(kN·m)	N_3 /kN	Q_4 /kN	M_4 /(kN·m)	N_4 /kN	Q_5 /kN	M_5 /(kN·m)	N_5 /kN
0	-200	500	300	-8.5	293.3	300.0	-229.1	-342.1	300.0	-61.1	-630.7	300.0	0	-791.2	300.0
30 000	-200	500	300	-8.6	293.3	292.8	-229.2	-339.0	285.0	-61.2	-626.9	279.2	0	-787.2	277.0
300 000	-200	500	300	-9.1	304.5	236.2	-229.8	-325.4	164.8	-61.6	-611.7	111.0	0	-771.6	90.9

由表 1 和表 2 可见,考虑水平力影响,梁的部分截面剪力、弯矩计算值比按原文克勒模型计算值相对误差超过 5% 梁内的轴力同原文克勒模型计算值相比变化非常大.同时若梁高取值增大,误差将更为可观.这些计算误差将影响设计结果,应引起重视.

表 2 各截面内力计算值误差

Table 2 Errors of calculated internal forces of each section

相对误差	截面 1			截面 2			截面 3			截面 4			截面 5		
	Q_1	M_1	N_1	Q_2	M_2	N_2	Q_3	M_3	N_3	Q_4	M_4	N_4	Q_5	M_5	N_5
$\delta_1/\%$	0.0	0.0	0.0	1.2	0.7	-2.5	0.04	0.9	-5.3	0.16	-0.61	-7.4	0.0	0.51	-8.3
$\delta_2/\%$	0.0	0.0	0.0	6.4	3.7	-27.0	0.30	5.1	-82.0	0.80	-3.10	-170.3	0.0	-2.54	-230.0

注 δ_1 和 δ_2 分别表示地基侧向系数取 30 000 kN/m³ 和 300 000 kN/m³ 时各截面计算内力相对误差, $\delta = (F - F_0)/F \times 100\%$, 其中 F 代表地基侧向系数不为 0 时的计算截面内力, F_0 代表地基侧向系数取 0 时的计算截面内力, 即采用原文克勒地基模型计算内力。

对于承受水平力的弹性地基梁, 应按偏压构件进行设计, 其控制内力为弯矩与轴力。在设计中, 应充分考虑轴力的变化, 对控制内力进行不利组合。

地基侧向系数 k_s 取值大小对梁的轴力计算值影响很大, 因此 k_s 不能任意取值。地基侧向系数 k_s 的取值, 应使计算所得的轴力切合实际。由弹性力学可推知地基侧向系数 k_s 比基床系数 k 大, 一般为十至数十倍。由计算结果可以看出, 地基侧向系数 k_s 取 10 倍的基床系数 k 值 ($k_s = 300\,000\text{ kN/m}^3$) 的计算结果更为合理。

4 结 论

- a. 对于承受水平力的弹性地基梁, 未按偏压构件进行设计是偏于不安全的。
- b. 本文提出了改进的文克勒地基模型, 并采用位移法推导出弹性地基梁单元劲度矩阵的修正项, 形成了可以用于计算承受水平力的弹性地基梁单元劲度矩阵, 还编制了计算程序。实例计算表明, 改进后文克勒地基模型在一定程度上较好地反映了轴向力对梁内力的影响。表明这是一种行之有效的模型, 具有较强的工程应用价值。

参考文献：

[1] 江平, 马贞信. 筏基础与地基、上部结构联合受力分析[J]. 河海大学学报, 1997, 25(4): 110—112.

[2] 苏超, 姜弘道, 谭恩会. 粘弹性基础梁计算方法及其应用[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2000, 28(5): 101—105.

[3] 陶阳, 周开富, 郭树荣. 十字交叉梁基础的设计计算方法[J]. 河海大学学报, 1998, 26(6): 114—120.

[4] 龙驭球. 弹性地基梁的计算[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981. 6—100.

[5] 谈至明. 具有水平摩阻力的弹性地基上梁的解[J]. 力学与实践, 1997, (3): 33—35.

[6] 中国船舶工业总公司第九设计研究院. 弹性地基梁及矩形板计算[M]. 北京: 国防工业出版社, 1983. 41—68.

[7] 陈天愚, 张克绪, 单兴波. 弹性地基梁的修正刚度矩阵解法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2000, (2): 44—48.

[8] 阎盛海. 地下建筑结构中弹性地基直梁的初参数法[J]. 大连大学学报, 2001, (2): 9—18.

Modified Winkler foundation model with horizontal force taken into account

ZHOU Ji-kai, DU Qin-qing

(College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract In view of some disadvantages of the Winkler foundation model in calculation of the elastic-foundation beam under the action of horizontal forces, a modified Winkler foundation model is developed in this paper. Based on the basic assumption of the Winkler foundation and in consideration of the influences of horizontal forces on shear forces and bending moments on beams, the correction term for the stiffness matrix of beam elements on elastic foundation is deduced by the displacement method, and a beam element stiffness matrix which is suitable for calculation of elastic foundation beams under the action of horizontal forces is formed. Besides, some programs for FEM calculation are also compiled. Calculation shows that the elastic foundation beams calculated with the modified model can be used for reasonable structural design.

Key words Winkler foundation; horizontal force; beam on elastic foundation; lateral foundation coefficient