

量子位非马尔柯夫过程的消相干

陈 艳

(南京交通职业技术学院,江苏 南京 210032)

摘要 利用子动力学投影的方法讨论量子位非马尔柯夫过程的消相干问题,提出量子位与周围热库弱耦合条件下非马尔柯夫过程动力学演化方程以及量子位克服消相干的一般判据以及投影子空间中量子计算的纠错方法.

关键词 子动力学;弱耦合近似;量子位;消相干

中图分类号 O413 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2004)06-0719-04

尽管在量子计算方面已经进行了广泛的研究,但是消相干问题始终是实现量子计算的主要障碍之一.消相干破坏了量子叠加态所包含的量子信息,最终使量子计算难以实现.在开放量子系统模型的基础上,已经提出了许多克服消相干的方法^[1~3].P. T. Shor 等提出了量子纠错码的方法,以及其他被动的消相干的方法,包括利用无消相干的子空间来实现量子计算.另外一种主动克服消相干的方法是利用脉冲和反馈的方法对量子消相干过程实现控制.

上面所列举的大部分方法中,所讨论的密度矩阵是从 Born-Markovian 近似的条件下的 Lindblad 主方程得到,或者是利用非马尔柯夫过程近似条件下 Kraus 算子和表示来讨论的.可以看出,如果有从 Liouville 空间得到约化密度矩阵算符将更精确,量子 Liouville 空间的投影方法是讨论开放量子系统最直接的方法,该方法已经用约化密度矩阵的方法来讨论量子位的消相干问题.最近在投影算符理论基础上的子动力学方法也被用来讨论开放的量子系统的问题.在弱耦合近似的条件下,子动力学方程可以直接从量子的 Liouville 方程得到约化密度矩阵.笔者利用子动力学的方法从量子 Liouville 方程出发得到约化密度矩阵,给出不同时间阶数近似条件下输入和输出量子系统的保真度,并在弱耦合条件下给出了无消相干态一般的判据表达式,提出了对开放量子系统实现投影子空间纠错的方法.

1 系统子动力学方程

考虑一个由 N 个量子位组成系统与一个热库弱耦合作用.如果用 H_S , H_B 和 H_{int} 分别表示系统哈密顿量,热库 R 哈密顿量以及系统和热库之间的相互作用哈密顿量,则系统和热库总共的哈密顿量 H_T 可以写成

$$H_T = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + \lambda H_{int} = H_0 + \lambda H_{int} \quad (1)$$

式中 I_B , I_S ——单位矩阵; λ ——系统和热库之间的耦合强度.因为是弱耦合可以认为 λ 很小,满足 $\lambda \ll 1$.在 Liouville 空间中,整个体系的量子 Liouville 方程可以写成 $i \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = L \rho(t)$,其中 Liouville 算符定义为 $L = L_0 + \lambda L_{int}$.形式上面 $\rho(t)$ 的演化可以写成 $\rho(t) = e^{iLt} \rho(0)$.对于系统而言,其约化密度矩阵算符是 $\rho_S(t) = Tr_B(\rho(t))$ 其中 $Tr_B(\cdot)$ 表示对环境求迹.

作了以上的标记之后,消相干问题可以用子动力学方法得到约化密度矩阵加以讨论.子动力学主要是对 Liouville 算符的谱分解方法.如果 L 与时间无关,则可以通过投影算符 Π_ν 将 Liouville 算符谱分解,并且满足关系 $\Pi_\nu L = L \Pi_\nu$, $\sum_\nu \Pi_\nu = 1$ 以及 $\Pi_\nu \Pi_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'}$.在子动力学中引进 2 个重要的算符:产生算符 C_ν 和消灭算符 D_ν ,它们由如下的关系定义为 $Q_\nu \Pi_\nu = C_\nu P_\nu \Pi_\nu(t)$ 和 $\Pi_\nu(t) Q_\nu = \Pi_\nu P_\nu D_\nu(t)$.其中 P_ν 表示 Liouville 算符的不关

联部分,此处选作 $L_0 = \sum_{\nu} E_{\nu} P_{\nu}$; L_0 就是式(1)的 Liouville 算符,而 Q_{ν} 是投影算符 P_{ν} 的补算符,定义为 $Q_{\nu} = 1 - P_{\nu}$. 这些算符满足如下的性质: $P_{\nu}^2 = P_{\nu}$, $P_{\nu} Q_{\nu} = 0$ 和 $P_{\nu} L_{\text{int}} P_{\nu} = 0$. 由此可以得到投影算符 Π_{ν} 的 P_{ν} 分量所满足的动力学方程,即子动力学方程:

$$i \frac{\partial}{\partial t} (P_{\nu} \Pi_{\nu} \rho(t)) = \Theta_{\nu} (P_{\nu} \Pi_{\nu} \rho(t)) \quad (2)$$

式中 Θ_{ν} 是中介算符,定义为 $\Theta_{\nu} = P_{\nu} L P_{\nu} + P_{\nu} L C_{\nu} P_{\nu}$. 子动力学方程式(2)主要优点是将系统在 Liouville 空间的中量子 Liouville 方程转化为投影空间中的子动力学方程. 由于在投影空间中自由度大大减小,所以在投影空间中的子动力学方程要比 Liouville 方程容易求解.

如果 Hamilton 量与时间无关,则子动力学方程的形式解为

$$\rho_{\nu}(t) = \sum_{\nu} (P_{\nu} + C_{\nu}) \exp(-i \Theta_{\nu} t) (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu}) \rho(0) \quad (3)$$

在子动力学的形式下,整个体系动力学方程的解可以通过超前和延迟的方法解产生和消灭算符的方程得到,其结果如下:

$$\begin{aligned} P_{\mu} C_{\nu} &= \frac{1}{E_{\mu} - E_{\nu} \pm i\epsilon} \lambda (P_{\mu} C_{\nu} - P_{\mu}) H_{\text{int}} (P_{\mu} + C_{\nu}) \\ D_{\nu} C_{\mu} &= \frac{1}{E_{\nu} - E_{\mu} \pm i\epsilon} \lambda (P_{\nu} + D_{\nu}) H_{\text{int}} (P_{\mu} - D_{\nu} P_{\mu}) \end{aligned} \quad (4)$$

在方程(3)中,通过一阶近似可以得到 $P_{\mu} C_{\nu}$ 和 $D_{\nu} P_{\mu}$ 的迭代解为

$$\begin{aligned} C_{\nu}^{[0]} &= 0 & P_{\mu} C_{\nu}^{[1]} &= \frac{-\lambda}{l_{\mu} - l_{\nu} + i\epsilon} P_{\mu} L_{\text{int}} P_{\nu} \\ D_{\nu}^{[0]} &= 0 & D_{\nu}^{[1]} P_{\mu} &= \frac{-\lambda}{l_{\nu} - l_{\mu} + i\epsilon} P_{\nu} L_{\text{int}} P_{\mu} \end{aligned} \quad (5)$$

式中上标表示近似的阶数. 从上述方程可以得到:在一阶近似的条件下,中介算符 $\Theta_{\nu}^{[1]}$ 谱分解等于

$$\Theta_{\nu}^{[1]} = P_{\nu} L P_{\nu} + P_{\nu} L C_{\nu}^{[1]} P_{\nu} = \left(l_{\nu}^0 - \sum_{\mu, \mu \neq \nu} \frac{\lambda l_{\nu\mu} l_{\mu\nu}}{l_{\mu} - l_{\nu} + i\epsilon} \right) P_{\nu} = E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} P_{\nu} \quad (6)$$

其中算符 $l_{\mu} = \langle\langle \mu | \mu \rangle\rangle$, $l_{\mu\nu} = \langle\langle \mu | \nu \rangle\rangle$; $|\mu\rangle$ 和 $|\nu\rangle$ 是 Liouville 空间中的超矢量.

在一阶近似的条件下面,整个体系密度矩阵的演化可以写成

$$\rho^{[1]}(t) = \sum_{\nu} \exp(-i E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} t) (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu}) \rho(0) = \sum_{\nu} \exp(-i E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} t) \Pi_{\nu} \quad (7)$$

其中 Π_{ν} 是投影算子, $\Pi_{\nu} = (P_{\nu} + C_{\nu}) P_{\nu} (P_{\nu} + D_{\nu} C_{\nu})^{-1} (P_{\nu} + D_{\nu})$. 由此可以得到系统的约化密度矩阵算符的演化为

$$\rho_S^{[1]}(t) = \text{Tr}_B \left(\sum_{\nu} \exp(-i E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} t) \Pi_{\nu} \rho(0) \right) \quad (8)$$

定义 $\rho_{\nu}^{[1]}(t)$ 为

$$\rho_{\nu}^{[1]}(t) = \exp(-i E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} t) \Pi_{\nu} \rho(0) \quad (9)$$

则 $\rho_{\nu}^{[1]}(t)$ 的演化可以写成

$$\rho_{\nu}^{[1]}(t) = \exp(-i E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} t) \rho_{\nu}^{[1]}(0) \quad (10)$$

方程 $\rho_S^{[1]}(t)$ 表达式可以写成

$$\rho_S^{[1]}(t) = \sum_{\nu} \rho_{\nu}^{[1]}(t) = \sum_{\nu} \exp(-i E_{\Theta_{\nu}}^{[1]} t) \rho_{\nu}^{[1]}(0) \quad (11)$$

其中 $\rho_{\nu}^{[1]}(0) \equiv \Pi_{\nu} \rho(0)$.

2 消相干中保真度的表达式

考虑混合态量子系统中保真度的表达式为

$$F(t) = \text{Tr}_S(\rho_S(0) \text{Tr}_B(\rho_T(t))) \quad (12)$$

其中 $\rho_S(0)$ 是系统的初态, $\text{Tr}_S(\cdot)$ 表示对系统求迹. 该保真度的表达式提供了一个在系统与环境弱耦合的条件

下量子态相干性消退的测度. 如果系统没有消相干, 则 $F(t) = \text{Tr}_S(\rho_S(0)U(t)\rho_S(0)U^\dagger(t)) = 1$; 其中 $U^\dagger(t)$ 是 $U(t)$ 的转置矩阵. 但是当系统存在消相干时, 保真度 $0 \leq F(t) \leq 1$. 为了表示消相干的程度, 把保真度按照时间 t 的级数展开得到

$$F(t) = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{\tau_n} \right)^n \tag{13}$$

其中消相干的速率定义为

$$\tau_n^{-1} = \{ \text{Tr}_B(\rho_S^{(n)}(0)) \}^{1/n} \tag{14}$$

其中 $\rho_S^{(n)}$ 表示系统的密度矩阵 ρ_S 对时间 t 的 n 次导数.

利用式 (14) 可得到不同时间近似条件下消相干速率的表达式为

$$\tau_0^{-1} = 1$$

$$\tau_n^{-1} = \left\{ \text{Tr}_S(\rho_S(0) \text{Tr}_B \left(\sum_\nu (P_\nu + C_\nu) \Theta_\nu^\dagger (P_\nu + D_\nu C_\nu)^\dagger (P_\nu + D_\nu) \rho_T(0) \right)) \right\}^{1/n} \tag{15}$$

式 (15) 是在时间近似条件下一般的消相干公式. 如果环境和系统是弱耦合的情况, 则各阶近似的表达式为

$$\tau_n^{-1} = \left\{ \text{Tr}_S(\rho_S(0) \text{Tr}_B \left(\sum_\nu E_{\Theta_\nu}^{[1]} \Pi_\nu \rho_T(0) \right)) \right\}^{1/n} \tag{16}$$

式 (16) 表示消相干的速率依赖下面两个因素 (a) 系统和环境之间的相互作用 (b) 系统的初始状态. 对于系统, 如果在 $t = 0$ 时刻选取系统的初始态满足 $\tau_0^{-1} = 0$, 则可称这些初始态是无消相干的. 式 (16) 给出了弱耦合近似条件下消除消相干的判据, 同时也为在弱耦合条件下如何选择最好的保真量子态来进行量子计算提供了一个普遍的条件, 而没有集体消相干的近似.

3 投影子空间中量子计算的纠错

从式 (8) 中将环境作用利用矩阵求迹去掉, 可以得到在弱耦合近似条件下投影子空间中的约化密度矩阵算符为

$$\rho_S^{[1]}(t) = \text{Tr}_B(\rho_\nu^{[1]}(t)) = \text{Tr}_B(\exp(-iE_{\Theta_\nu}^{[1]}t)\rho_\nu^{[1]}(0)) = \exp(-iE_{\Theta_\nu}^{[1]}t)\text{Tr}_B(\Pi_\nu \rho_T(0)) \tag{17}$$

从式 (17) 可以看出投影子空间中, 约化密度矩阵演化是么正的. 和理想的无消相干情况相比较, Liouville 空间的算符本征值由 $E_{\Theta_\nu}^0 = P_\nu L_0 P_\nu$ 变成 $E_{\Theta_\nu}^0 = P_\nu L_0 P_\nu + P_\nu L_{\text{int}} C_\nu P_\nu$. 环境和系统的相互作用可以通过调节相互作用时间使其满足关系

$$\exp(-iE_{\Theta_\nu}^{[1]}(t + \Delta t)) = \exp(-iE_{\Theta_\nu}^0 t) \tag{18}$$

而消去. 其中调节时间满足

$$\Delta t = \frac{(E_{\Theta_\nu}^0 - E_{\Theta_\nu}^{[1]})t}{E_{\Theta_\nu}^{[1]}} \tag{19}$$

在一定的条件下, 可以认为比例系数 $\frac{(E_{\Theta_\nu}^0 - E_{\Theta_\nu}^{[1]})t}{E_{\Theta_\nu}^{[1]}}$ 独立于能级 $E_{\Theta_\nu}^0$ 或 $E_{\Theta_\nu}^{[1]}$. 其物理意义是系统的能量均匀分布, 即能级之间的间距是均等的. 这种消相干的纠错方法在非 Markovian 条件下也同样成立. 与无消相干子空间来克服消相干的方法相比, 这种方法在弱耦合近似条件下没有对系统和环境集体相互的对称性要求. 同时编码在投影子空间量子态的信息也是可以解码和测量的, 在 Liouville 空间中投影基矢是正交的, 因而是可区分的, 即

$$\rho_{S\nu}^{[1]} \rho_{S\mu}^{[1]} = 0 \quad (\text{当 } \nu \neq \mu, \text{ 因为 } P_\nu P_\mu = 0) \tag{20}$$

4 结果和讨论

利用子动力学投影的方法讨论了 Liouville 空间中系统与环境弱耦合相互作用下的系统演化动力学方程. 在此基础上分析了量子位的消相干问题, 得到量子位在不同阶时间近似下量子位的量子态保真度表达式, 提出了弱耦合近似条件下量子位无消相干态的判据以及投影子空间中量子计算的纠错方法. 对互弱耦合

近似条件下系统与环境的集体情况下的量子位消相干作了具体的计算.笔者认为,这种子动力学投影的方法对于讨论弱耦合近似条件下开放量子系统的动力学行为具有一定普遍意义.

参考文献:

[1] 郭光灿.量子信息引论[J].物理,2001,30(5):286—293.
[2] 李传锋,郭光灿.量子信息研究进展[J].物理学进展,2000,20(4):407—431.
[3] 毕桥.子动力学理论及其在复杂动力系统中的应用[M].武汉:武汉工业大学出版社,1998.12—45.
[4] Knill E,Laflamme R.Theory of quantum error-correcting code[J].Phys Rev A,1997,55(2):900—911.
[5] Viola L,Lloyd S,Knill E.Mixed-state entanglement and quantum error correction[J].Phys Rev A,1996,54(5):3824—3851.
[6] Zanardi P.Computation on an error-avoiding quantum code and symmetrization[J].Phys Rev A,1999,60(2):729—732.

Qubit decoherence in non-Markovian approach

CHEN Yan

(Nanjing College of Transportation Technique,Nanjing 210032,China)

Abstract:The subdynamic projection method was used to deal with the qubit decoherence in the non-Markovian approach. A new equation reflecting the dynamic evolution of the non-Markovian approach was given under the condition of weak-coupling between qubit and the environment surrounding. Furthermore,a general criterion for qubit overcoming decoherence and a way for correction in qubit calculation in the projection subspace were proposed.

Key words:subdynamics;weak-coupling approximation;qubit;decoherence

· 简讯 ·

水信息网招生招聘频道启事

水信息网全新推出针对广大水利用人单位以及各种水利人才的招生招聘频道,总览国内外水利行业最新最快最全的招生招聘信息,希望它能成为用人单位和水利人才之间方便、高效沟通的纽带,为您求才、求职、求学、创业提供极大的帮助.目前已经有数百家企事业单位以及数以千计的个人在招生招聘频道发布了自己的供求信息,并找到了自己合适的人才或是工作,真正做到了双向选择、人尽其才,达到了用人单位和人才双赢的良好格局.

毛遂自荐:

“人才也需露锋芒”,将自身能力在我们提供给您的平台上充分展示,您将成为用人单位追逐的焦点,不再为求职东奔西走.

水行业政府、事业单位、企业招聘信息:

您是否在为“新鲜血液”的注入感到担忧,为人才的匮乏而烦恼,在这里我们为您详细诠释用人单位的脊髓文化,全面展示用人单位的魅力.

水行业院校招生信息版块:

全面发布全国各大水利院校招生、进修信息,为您提供学习机会.

希望广大水利企业、水利人才在我们的平台上充分展示您的企业风采和个人魅力,也希望我们的招生招聘频道能在您事业的成功之路上尽我们的绵薄之力!

地址:天津市河西区龙潭路15号 邮编:300181

电话:022-24102119 传真:022-24102164

网址:www.hwcc.com.cn