

一类非线性扩散方程组解的整体存在和有限爆破问题

杨红卫 陈才生

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 研究了由 3 个非线性扩散方程通过非线性反应项耦合而得到的一类反应扩散方程组 ,并运用构造上下解的方法讨论了这类方程组的齐次边界问题的整体存在和有限爆破条件 .主要结果可以推广到具有同样形式的 n 个方程的反应扩散方程组 .

关键词 非线性扩散方程 ;整体存在 ;有限爆破 ;齐次边界

中图分类号 O175.29 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2005)01-0115-04

本文研究了下列一类非线性扩散方程组解的整体存在有界和爆破问题 .

$$u_t = \Delta u^{m_1} + u^{p_1} v^{q_1} \quad v_t = \Delta v^{m_2} + v^{p_2} w^{q_2} \quad w_t = \Delta w^{m_3} + w^{p_3} u^{q_3} \quad (x \in \Omega, t \in (0, T)) \quad (1)$$

具有连续有界初值

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad w(x, 0) = w_0(x) \quad (x \in \Omega) \quad (2)$$

和边值

$$u(x, t) = 0 \quad v(x, t) = 0 \quad w(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t \in (0, T)) \quad (3)$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 ,参数 $m_i \geq 1, p_i, q_i > 0, p_i < m_i (i = 1, 2, 3)$. 这类问题在单个方程和两个方程组成的方程组情况下已有许多学者研究过 .如 :文献 [1] 研究了

$$u_t = \Delta u^m + u^p \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in (-R, R), t \in (0, T))$$

在边值条件下 $u(\pm R, t) = 1$ 解的整体存在和爆破性 .文献 [2, 3] 研究了如下非线性扩散方程组 :

$$u_t = \Delta u^m + v^p \quad v_t = \Delta v^m + u^p \quad (x \in \Omega, t \in (0, T))$$
$$u(x, t) = v(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t \in (0, T))$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (x \in \Omega)$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 为具有光滑边界条件 $\partial\Omega$ 的有界区域 ,且 $m, n, p, q > 1$ 得到下列结果 :当 $pq < mn$ 时 ,方程组的解整体存在 ;当 $pq > mn$ 时 ,方程组的解对于大的初值有限爆破 .文献 [3, 4] 还考虑了 $pq = mn$ 的情况 .

本文将以上问题推广到了 3 个方程的方程组中 ,从而进一步推广到 n 个方程组成的方程组的情形 ,并且是带有强耦合的方程组 .

1 解的整体存在和整体存在性

定义 令 $T > 0$,正函数 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in C^2([0, T] \times \Omega)$ 称 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 为方程组 (1)~(3) 的上解 .若不等式

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \Delta \bar{u}^{m_1} - \bar{u}^{p_1} \bar{v}^{q_1} \geq u_t - \Delta u^{m_1} - u^{p_1} v^{q_1} \\ \bar{v}_t - \Delta \bar{v}^{m_2} - \bar{v}^{p_2} \bar{w}^{q_2} \geq v_t - \Delta v^{m_2} - v^{p_2} w^{q_2} \\ \bar{w}_t - \Delta \bar{w}^{m_3} - \bar{w}^{p_3} \bar{u}^{q_3} \geq w_t - \Delta w^{m_3} - w^{p_3} u^{q_3} \end{cases} \quad (x \in \Omega, t \in (0, T))$$
$$\begin{cases} \bar{u}(x, t) \geq u(x, t) & \bar{v}(x, t) \geq v(x, t) & \bar{w}(x, t) \geq w(x, t) \\ \bar{u}(x, 0) \geq u(x, 0) & \bar{v}(x, 0) \geq v(x, 0) & \bar{w}(x, 0) \geq w(x, 0) \end{cases} \quad (x \in \Omega)$$

成立 .改变不等号的方向 ,可得下解的定义 .

引理 1 如果 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), (\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 是方程组 (1)~(3) 的一对上下解 ,那么方程组 (1)~(3) 存在唯一的解 (u, v, w) 满足 $\underline{u} < u < \bar{u}, \underline{v} < v < \bar{v}, \underline{w} < w < \bar{w}$.

证明类似于文献[5]的证明.由比较原理知,方程组(1)~(3)的解 (u, v, w) 对于 $x \in \Omega, t \in (0, T)$ 满足 $u(x, t) > 0, v(x, t) > 0, w(x, t) > 0$.显然 $(0, 0, 0)$ 为下解.由引理1,为证明解的整体存在有界性,只需要构造方程组(1)~(3)的关于 t 一致有界的上解.

定理1 如果 $(m_1 - p_1) \wedge (m_2 - p_2) \wedge (m_3 - p_3) > q_1 q_2 q_3$,那么方程组(1)~(3)的解整体存在且有界.

证明 让 $\phi(x)$ 是问题

$$\begin{cases} -\Delta \phi = 1 & (x \in \Omega) \\ \phi = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases}$$

的唯一解,且满足 $0 \leq \phi \leq c_0, c_0$ 为正的常数.构造函数

$$\bar{u}(x, t) = [a(1 + \phi(x))]^{\frac{1}{m_1}}$$

$$\bar{v}(x, t) = [b(1 + \phi(x))]^{\frac{1}{m_2}}$$

$$\bar{w}(x, t) = [c(1 + \phi(x))]^{\frac{1}{m_3}}$$

其中 a, b, c 为充分大的正数.由 $0 \leq \phi(x) \leq c_0, 0 < \frac{1}{m_i} \leq 1 (i = 1, 2, 3)$ 可知 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 整体存在且有界.下面验证 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 是方程组(1)~(3)的上解.因为 $0 \leq \phi(x) \leq c_0$,所以

$$\bar{u}^{p_1} \bar{v}^{q_1} = \frac{p_1}{a^{m_1} b^{m_2}} [1 + \phi(x)]^{\frac{p_1}{m_1} + \frac{q_1}{m_2}} \leq \frac{p_1}{a^{m_1} b^{m_2}} (1 + c_0)^{\frac{p_1}{m_1} + \frac{q_1}{m_2}} \quad \bar{u}_t = 0, \Delta \bar{u}^{m_1} = -a$$

由于 $(m_1 - p_1) \wedge (m_2 - p_2) \wedge (m_3 - p_3) > q_1 q_2 q_3$,易证,存在充分大的 a, b, c 满足

$$a \geq \frac{p_1}{a^{m_1} b^{m_2}} (1 + c_0)^{\frac{p_1}{m_1} + \frac{q_1}{m_2}}$$

所以

$$\bar{u}_t \geq \Delta \bar{u}^{m_1} + \bar{u}^{p_1} \bar{v}^{q_1}$$

同理可证

$$\bar{v}_t \geq \Delta \bar{v}^{m_2} + \bar{v}^{p_2} \bar{w}^{q_2} \quad \bar{w}_t \geq \Delta \bar{w}^{m_3} + \bar{w}^{p_3} \bar{u}^{q_3} \quad (x \in \Omega, t \in (0, T))$$

由于 a, b, c 是充分大的正数,不妨设 $\min\{\frac{1}{a^{m_1}}, \frac{1}{b^{m_2}}, \frac{1}{c^{m_3}}\} \geq \max\{\|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty, \|w_0\|_\infty\}$,于是满足

$$\bar{u}(x, 0) \geq u_0(x) \quad \bar{v}(x, 0) \geq v_0(x) \quad \bar{w}(x, 0) \geq w_0(x) \quad (x \in \Omega)$$

$$\begin{cases} \bar{u}(x, t) \geq u(x, t) = 0 \\ \bar{v}(x, t) \geq v(x, t) = 0 \\ \bar{w}(x, t) \geq w(x, t) = 0 \end{cases} \quad (x \in \partial\Omega, t \in (0, T))$$

综上所述 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ 为方程组(1)~(3)的上解,且与 t 无关.所以方程组(1)~(3)的解整体存在且有界.

2 解的有限爆破

引理2 如果方程组(1)~(3)的下解 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 在有限时间内爆破,则方程组(1)~(3)的解在有限时间内爆破.

证明类似于文献[5]的证明.根据这个引理,研究解的有限爆破性,只需构造方程组(1)~(3)的一个具有有爆破性的下解.

命题1 由于 $(m_1 - p_1) \wedge (m_2 - p_2) \wedge (m_3 - p_3) < q_1 q_2 q_3$,存在 $a_1, a_2, a_3 > 0$ 满足

$$(m_1 - p_1)a_1 < q_1 a_2 \quad (m_2 - p_2)a_2 < q_2 a_3 \quad (m_3 - p_3)a_3 < q_3 a_1$$

受文献[6]的启发,令 $B_k = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < k, k \in \mathbf{R}^+\}$,在 B_1 中取函数 $\phi_k(x)$ 且满足条件

$$\phi_k(x) \in C^2(B_1), \phi_k(x) > 0 \quad \text{in } B_1$$

$$\phi_k(x) = 0 \quad \text{on } \partial B_1$$

$$\Delta \phi_k(x) \geq \sigma > 0 \quad \text{当 } \phi_k(x) \leq c_1 \text{ 时}$$

令 $\phi_k(x) = \phi_1\left(\frac{x}{k}\right)$,则 $\phi_k(x)$ 必满足条件

$$\phi_k(x) : B_k \rightarrow \mathbf{R}^+ \quad \phi_k(x) > 0 \quad \text{in } B_k$$

$$\phi_k(x) = 0 \quad \text{on } \partial B_k$$

$$\Delta \phi_k(x) \geq \frac{\sigma}{k^2} \quad \text{当 } x \in \{x \in B_k \mid \phi_k(x) \leq c_1\}$$

$$\Delta \phi_k(x) \geq \frac{-l}{k^2} \quad \text{当 } x \in \{x \in B_k \mid \phi_k(x) > c_1\} \quad -l = \inf \Delta \phi_k(x) \quad (x \in B_1)$$

定理 2 如果 $(m_1 - p_1) \wedge (m_2 - p_2) \wedge (m_3 - p_3) < q_1 q_2 q_3$, 且区域 Ω 是厚的 (也就是说区域 Ω 包含一个充分大的球), 那么方程组 (1)~(3) 的解在有限时间内爆破.

证明 在 B_k 中构造方程组 (1)~(3) 的下解.

$$\underline{u}(x, t) = (\varepsilon t + A)^{p_1} \phi_k^{\frac{1}{m_1}}(x)$$

$$\underline{v}(x, t) = (\varepsilon t + A)^{p_2} \phi_k^{\frac{1}{m_2}}(x)$$

$$\underline{w}(x, t) = (\varepsilon t + A)^{p_3} \phi_k^{\frac{1}{m_3}}(x)$$

其中 A 为任意正的常数, 则

$$\Delta \underline{u}^{m_1} = (\varepsilon t + A)^{p_1 m_1} \Delta \phi_k(x)$$

$$\underline{u}_t = \varepsilon (\varepsilon t + A)^{p_1 - 1} \phi_k^{\frac{1}{m_1}}(x)$$

$$\underline{u}^{p_1} \underline{v}^{q_1} = (\varepsilon t + A)^{p_1 + q_1} \phi_k^{\frac{p_1}{m_1} + \frac{q_1}{m_2}}(x)$$

当 $\phi_k(x) \leq c_1$ 时 $\Delta \phi_k(x) \geq \sigma/k^2$, 则取充分小的 ε , 满足 $\underline{u}_t \leq \Delta \underline{u}^{m_1} + \underline{u}^{p_1} \underline{v}^{q_1}$.

当 $\phi_k(x) \geq c_1$ 时 $\Delta \phi_k(x) \geq -l/k^2$.

$$\text{令 } c_2 = \sup_{x \in B_k} \phi_k(x)$$

取 $\frac{l}{k} \leq \frac{1}{2} \min \{ c_1^{\frac{p_1}{m_1} + \frac{q_1}{m_2}} A^{a_2 q_1 - (m_1 - p_1) a_1} \}$. 取充分小的 ε , 满足 $\underline{u}_t \leq \Delta \underline{u}^{m_1} + \underline{u}^{p_1} \underline{v}^{q_1}$.

同理可证

$$\underline{v}_t \leq \Delta \underline{v}^{m_2} + \underline{v}^{p_2} \underline{w}^{q_2} \quad \underline{w}_t \leq \Delta \underline{w}^{m_3} + \underline{w}^{p_3} \underline{u}^{q_3}$$

注意到 A 是任意正的常数, 对于任意初值选取 A , 使之满足

$$\max \{ A^{a_1} c_2^{\frac{1}{m_1}}, A^{a_2} c_2^{\frac{1}{m_2}}, A^{a_3} c_2^{\frac{1}{m_3}} \} \geq \min \{ \|u_0^{-1}(x)\|_{\infty}^{-1}, \|v_0^{-1}(x)\|_{\infty}^{-1}, \|w_0^{-1}(x)\|_{\infty}^{-1} \}$$

所以

$$\underline{u}(x, t) \leq u_0(x) \quad \underline{v}(x, t) \leq v_0(x) \quad \underline{w}(x, t) \leq w_0(x) \quad (x \in B_k)$$

且显然满足

$$\underline{u}(x, t) = u(x, t) \quad \underline{v}(x, t) = v(x, t) \quad \underline{w}(x, t) = w(x, t) \quad (x \in \partial B_k, t \in (0, T))$$

所以 $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ 是方程组 (1)~(3) 的下解. 因此

$$u(x, t) \geq \underline{u}(x, t) \quad v(x, t) \geq \underline{v}(x, t) \quad w(x, t) \geq \underline{w}(x, t)$$

因为 $\phi_k > 0, x \in B_k$, 所以存在 $B_l \subset \subset B_k, \delta > 0$ 使

$$u(x, t) \geq \delta t^{a_1} \quad v(x, t) \geq \delta t^{a_2} \quad w(x, t) \geq \delta t^{a_3} \quad (4)$$

为了证明解在 B_l 内有限爆破, 让我们来看下面的方程:

$$\omega_t = \Delta \omega + k \omega^{1+p} \quad (x \in B_l, t > 0)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x) \geq 1 \quad (x \in B_l)$$

$$\omega(x, t) = 1 \quad (x \in \partial B_l, t > 0)$$

$$p = \min \{ q_1 a_2 - (m_1 - p_1) a_1, q_2 a_3 - (m_2 - p_2) a_2, q_3 a_1 - (m_3 - p_3) a_3 \} k = \min_{1 \leq i \leq 3} (a_i m_i)^{-1}$$

选取初值适当大, 使得方程的解有限爆破. 由式 (4) 知, 存在 $T_1: 0 < T_1 < \infty$ 使得 $u(x, t) \geq M, v(x, t) \geq M, w(x, t) \geq M$ 对所有的 $x \in B_l, t > T_1$ 成立. 其中 $M \geq \max_{1 \leq i \leq 3} \{\omega_0^{a_i}\}$. 取

$$\underline{u}_1(x, t) = \omega^{a_1} \quad \underline{v}_1(x, t) = \omega^{a_2} \quad \underline{w}_1(x, t) = \omega^{a_3}$$

下证当 $x \in B_l, t > T_1$ 时 $(\underline{u}_1, \underline{v}_1, \underline{w}_1)$ 是方程组 (1)~(3) 的下解.

$$\Delta \underline{u}_1^{m_1} + \underline{u}_1^{p_1} \underline{v}_1^{q_1} \geq a_1 m_1 \omega^{m_1 a_1 - 1} \Delta \omega + \omega^{a_1 p_1 + a_2 q_1}$$

$$\underline{u}_{1t} = a_1 \omega^{a_1 - 1} \omega_t \leq m_1 a_1 \omega^{a_1 m_1 - 1} (\Delta \omega + k \omega^{1+p}) \leq m_1 a_1 \omega^{a_1 m_1 - 1} \Delta \omega + \omega^{a_1 m_1 + p}$$

由 p 的取值, $a_1 m_1 + p \leq a_1 p_1 + a_2 q_1$. 所以 $\underline{u}_{1t} \leq \Delta \underline{u}_1^{m_1} + \underline{u}_1^{p_1} \underline{v}_1^{q_1}$.

同理可证

$$\underline{v}_{1t} \leq \Delta \underline{v}_1^{m_2} + \underline{v}_1^{p_2} \underline{w}_1^{q_2} \quad \underline{w}_{1t} \leq \Delta \underline{w}_1^{m_3} + \underline{w}_1^{p_3} \underline{u}_1^{q_3}$$

且

$$\underline{u}_1(x, t) \leq u(x, t) \quad \underline{v}_1(x, t) \leq v(x, t) \quad \underline{w}_1(x, t) \leq w(x, t) \quad (x \in \partial B_l, t > T_1)$$

$$\underline{u}_1(x, 0) \leq u(x, 0) \quad \underline{v}_1(x, 0) \leq v(x, 0) \quad \underline{w}_1(x, 0) \leq w(x, 0) \quad (x \in B_l)$$

故当 $x \in B_l, t > T_1$ 时 $(\underline{u}_1, \underline{v}_1, \underline{w}_1)$ 是方程组 (1)~(3) 的下解. 所以方程组 (1)~(3) 的解在 $x \in B_l, t > T_1$ 时是有限爆破的, 从而推知方程组 (1)~(3) 的解在有限时间内爆破.

推论 本文的主要结果不难推广到 n 个方程的方程组的情形.

参考文献:

- [1] ZHANG Z B, JIANG L S. Blow-up of solution of a class of nonlinear parabolic equations[J]. Partial Differ Equations, 1991, 4(1): 35—50.
- [2] GALAKTIONOV V A, KURDYUMOV S P, SAMARSKII A A. A parabolic system of quasilinear equations I[J]. Differ Equations, 1983, 19(12): 1558—1571.
- [3] GALAKTIONOV V A, KURDYUMOV S P, SAMARSKII A A. A parabolic system of quasilinear equations II[J]. Differ Equations, 1985, 21(9): 1046—1062.
- [4] WANG Ming-xin. Note on a quasilinear parabolic system[J]. Nonlinear Anal, 1997, 29(7): 813—821.
- [5] PAO C V. Nonlinear parabolic and elliptic equations[M]. New York and London: Plenum Press, 1992.
- [6] JULIO D R, NOEMI W. Blow-up vs. global existence for a semilinear reaction-diffusion system in a bounded domain[J]. Partial Differential Equations, 1995, 20(11, 12): 1991—2004.

Global existence and finite blow-up of solutions to a class of nonlinear diffusion system

YANG Hong-wei, CHEN Cai-sheng

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract A class of reaction-diffusion system obtained by coupling of nonlinear reaction items of 3 nonlinear diffusion equations was studied. The global existence and finite blow-up condition of the solution to the reaction-diffusion system was discussed for the homogeneous boundary condition by construction of solutions to the nonlinear diffusion equations. The results can be extended to similar systems of n equations.

Key words nonlinear diffusion system; global existence; finite blow-up; homogeneous boundary