

# 弹性力学应力边界问题的辛差分格式

朱炳麒<sup>1</sup>,周建方<sup>1</sup>,卓家寿<sup>2</sup>

(1.河海大学机电工程学院,江苏 常州 213022;2.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

**摘要** 将全区域离散的有限差分法引入弹性力学辛体系,建立了应力边界问题的平面直角坐标辛差分格式,用对偶的二类变量进行求解,可直接求得位移和应力.编程并计算了有关算例,结果表明辛差分法是有效的,为弹性力学辛体系提供了一种新的数值方法.

**关键词** 弹性力学辛体系 有限差分法 应力边界 直角坐标 辛差分格式

**中图分类号** O343.4      **文献标识码** :A      **文章编号** :1000-1980(2005)02-0181-05

在 Lagrange 体系中,不管是解析法还是数值方法,都是在一类变量的范围之内求解,受体系本身的限制,均有其局限性<sup>[1]</sup>.在辛体系中,解析法和数值方法都在二类变量的范围内求解,可同时求得位移和应力,而且可利用分离变量法、本征函数展开法等理性方法进行解析求解,具有 Lagrange 体系无法比拟的优点.弹性力学辛体系建立以来,在理论和方法上都有了重大发展,取得了丰硕的研究成果,尤其在解析法方面,不仅求得了许多 Lagrange 体系下已有的解答,也求得了一些新解<sup>[2~4]</sup>,但解析法只能在规则区域内求解,而且仍然相当复杂,有时甚至难以进行.文献[5]等发展了辛体系的半解析法,可以求解相当一类问题,但令人遗憾的是同样受到区域形状的限制.

为适应广泛的几何形状和边界条件,文献[6]基于 Hellinger-Reissner 变分原理,发展了辛体系下全区域离散的有限元法,突破了解析法和半解析法对区域形状要求较高的限制,为辛体系有限元法应用于工程实际奠定了基础.有限差分法是一种经典的数值方法,无需引入形函数,可构造出高阶精度的差分格式. Lagrange 体系的位移差分法和应力函数差分法都有一定的局限性<sup>[1]</sup>,本文将全区域离散的有限差分法引入到辛体系,对具有应力边界的平面问题进行了有关公式的推导,建立了直角坐标辛差分格式,并编程对算例进行计算,结果令人满意,说明有限差分法在辛体系中也是有效的,为弹性力学辛体系提供了一种新的数值方法.

## 1 差分格式的建立

辛体系下有限差分法思想与 Lagrange 体系中差分法的思想基本相同,在区域内设置网格、结点后,取结点的邻域作为积分区域(结点邻域的概念见文献[1]),用积分插值法建立结点的差分方程,从而形成整体差分格式.下面以各向同性平面应力问题为例,建立应力边界问题的平面直角坐标辛差分格式.

### 1.1 内网结点的差分格式

辛体系中 Hamilton 对偶方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= -\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= -\frac{\partial \tau}{\partial x} + (-F_z) & \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (-F_x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在矩形区域上设置网格,设 $(i,j)$ 为内网结点,其4个邻点为 $(i+1,j)$ , $(i,j+1)$ , $(i-1,j)$ , $(i,j-1)$ , $x$ 和 $z$ 方向的步长分别取为 $h_x$ 和 $h_z$ ,如图1所示,取结点 $(i,j)$ 的邻域(图中阴影线部分)为积分区域 $D$ ,将式(1)在区域 $D$ 上积分,并利用 Green 公式,有

$$\left. \begin{aligned} - \oint_{\partial D} w dx + \oint_{\partial D} \nu u dz - \iint_D \frac{1-\nu^2}{E} \sigma dx dz &= 0 \\ - \oint_{\partial D} u dx + \oint_{\partial D} w dz - \iint_D \frac{2(1+\nu)}{E} \tau dx dz &= 0 \\ - \oint_{\partial D} \sigma dx + \oint_{\partial D} \tau dz + \iint_D F_z dx dz &= 0 \\ - \oint_{\partial D} \tau dx + \oint_{\partial D} E \frac{\partial u}{\partial x} dz + \oint_{\partial D} \nu \sigma dz + \iint_D F_x dx dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

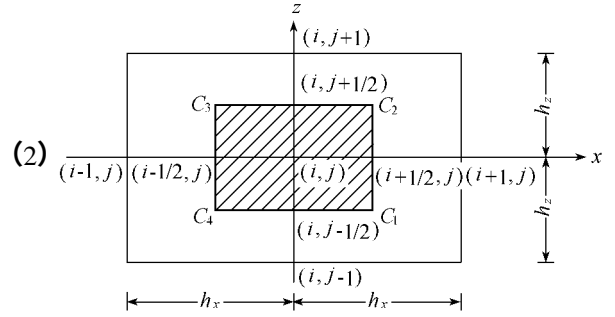


图1 内网结点及其积分区域

Fig.1 Internal node and integral region

现考虑任一函数  $g(x, z)$ , 由积分中点公式和差商公式, 得

$$- \oint_{\partial D} g dx \approx (g_{i,j+1/2} - g_{i,j-1/2}) h_x \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right)_{i,j} h_z \right] h_x \approx \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2 h_z} h_z h_x = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2} h_x \quad (3)$$

而

$$\oint_{\partial D} g dz \approx \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{2} h_z \approx \frac{g_{i+1,j} - g_{i-1,j}}{2} h_z \quad (4)$$

$$\iint_D g dx dz \approx g_{i,j} h_x h_z \quad (5)$$

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial x} dz \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \right] h_z \approx \left( \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{h_x} - \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{h_x} \right) h_z = (g_{i+1,j} + g_{i-1,j} - 2g_{i,j}) \frac{h_z}{h_x} \quad (6)$$

将式(3)~(6)代入式(2), 并整理得差分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2} h_x + \nu \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} h_z - \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{i,j} h_x h_z &= 0 \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} h_x + \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2} h_z - \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{i,j} h_x h_z &= 0 \\ \frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1}}{2} h_x + \frac{\tau_{i+1,j} - \tau_{i-1,j}}{2} h_z + (F_z)_{i,j} h_x h_z &= 0 \\ \frac{\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j-1}}{2} h_x + E \frac{h_z}{h_x} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) + \nu \frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{2} h_z + (F_x)_{i,j} h_x h_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)即为内网结点的差分格式.

### 1.2 左右边界结点的差分格式

对于边界上各结点, 式(2)仍然成立, 但不同的边界结点, 其邻域不同, 因此仍需进行特别处理. 在左边界上, 结点的积分区域如图2所示, 得

$$- \oint_{\partial D} g dx \approx (g_{N_2} - g_{N_4}) \frac{h_x}{2} \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right)_{i,j} h_z \right] \frac{h_x}{2} \approx \left( \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2 h_z} h_z \right) \frac{h_x}{2} = \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{4} h_x \quad (8)$$

而

$$\oint_{\partial D} g dz \approx (g_{i+1/2,j} - g_{i,j}) h_z \approx \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{2} h_z \quad (9)$$

$$\iint_D g dx dz \approx \frac{1}{2} g_{i,j} h_x h_z \quad (10)$$

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial x} dz \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,j} \right] h_z \approx \left[ \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{h_x} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,j} \right] h_z =$$

$$(g_{i+1,j} - g_{i,j}) \frac{h_z}{h_x} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,j} h_z \quad (11)$$

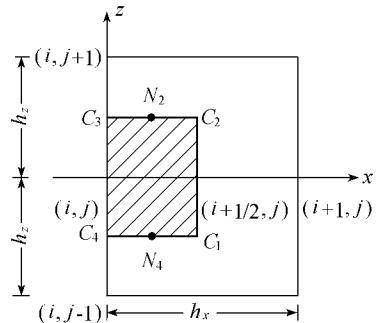


图2 左边界结点及其积分区域

Fig.2 Node on left boundary and integral region

将式(8)~(11)代入式(2),并由 $\left(E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma\right)_{i,j} = (\sigma_x)_{i,j}$ 整理得差分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{4} h_x + \nu \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} h_z - \frac{1 - \nu^2}{2E} \sigma_{i,j} h_x h_z &= 0 \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{4} h_x + \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2} h_z - \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{i,j} \frac{h_x h_z}{2} &= 0 \\ \frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1}}{4} h_x + \frac{\tau_{i+1,j} - \tau_{i-1,j}}{2} h_z + (F_z)_{i,j} \frac{h_x h_z}{2} &= 0 \\ \frac{\tau_{i,j+1} - \tau_{i,j-1}}{4} h_x + E \frac{h_z}{h_x} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \nu \frac{\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j}}{2} h_z + (-\sigma_x)_{i,j} h_z + (F_x)_{i,j} \frac{h_x h_z}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)即为左边界结点的差分格式. 对于右边界结点,可得到类似的差分格式,不再列出.

### 1.3 上下边界结点的差分格式

在上边界上,结点的积分区域如图3所示,有

$$-\oint_{\partial D} g dx \approx (g_{i,j} - g_{i,j-1/2}) h_x \approx \frac{g_{i,j} - g_{i,j-1}}{2} h_x \quad (13)$$

$$\oint_{\partial D} g dz \approx (g_{N_1} - g_{N_3}) \frac{h_z}{2} \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) h_x \right] \frac{h_z}{2} \approx$$

$$\frac{g_{i+1,j} - g_{i-1,j}}{2 h_x} h_x \frac{h_z}{2} = \frac{g_{i+1,j} - g_{i-1,j}}{4} h_z \quad (14)$$

$$\iint_D g dx dz \approx \frac{1}{2} g_{i,j} h_x h_z \quad (15)$$

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial x} dz \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{N_1} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{N_3} \right] \frac{h_z}{2} \approx \left( \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{h_x} - \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{h_x} \right) \frac{h_z}{2} = (g_{i+1,j} + g_{i-1,j} - 2g_{i,j}) \frac{h_z}{2 h_x} \quad (16)$$

将式(13)~(16)代入式(2),并整理得差分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{2} h_x + \nu \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{4} h_z - \frac{1 - \nu^2}{2E} \sigma_{i,j} h_x h_z &= 0 \\ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{2} h_x + \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{4} h_z - \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{i,j} \frac{h_x h_z}{2} &= 0 \\ \frac{\sigma_{i,j} - \sigma_{i,j-1}}{2} h_x + \frac{\tau_{i+1,j} - \tau_{i-1,j}}{4} h_z + (F_z)_{i,j} \frac{h_x h_z}{2} &= 0 \\ \frac{\tau_{i,j} - \tau_{i,j-1}}{2} h_x + E \frac{h_z}{2 h_x} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) + \nu \frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{4} h_z + (F_x)_{i,j} \frac{h_x h_z}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)即为上边界结点的差分格式. 对于下边界结点,可得到类似的差分格式,不再列出.

### 1.4 角结点的差分格式

左上角结点的积分区域如图4所示,有

$$-\oint_{\partial D} g dx \approx (g_{N_2} - g_{N_4}) \frac{h_x}{2} \approx \frac{g_{i,j} - g_{i,j-1}}{2} \frac{h_x}{2} \approx \frac{g_{i,j} - g_{i,j-1}}{4} h_x \quad (18)$$

而

$$\oint_{\partial D} g dz \approx (g_{N_1} - g_{N_3}) \frac{h_z}{2} \approx \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{2} \frac{h_z}{2} = \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{4} h_z \quad (19)$$

$$\iint_D g dx dz \approx \frac{1}{4} g_{i,j} h_x h_z \quad (20)$$

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial x} dz \approx \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{N_1} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{N_3} \right] \frac{h_z}{2} \approx \left[ \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{h_x} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,j} \right] \frac{h_z}{2} = (g_{i+1,j} - g_{i,j}) \frac{h_z}{2 h_x} - \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{h_z}{2} \quad (21)$$

将式(18)~(21)代入式(2),并由 $\left(E \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \sigma\right)_{i,j} = (\sigma_x)_{i,j}$ 整理得

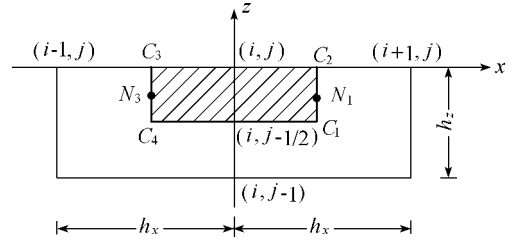


图3 上边界结点及其积分区域

Fig.3 Node on upper boundary and integral region

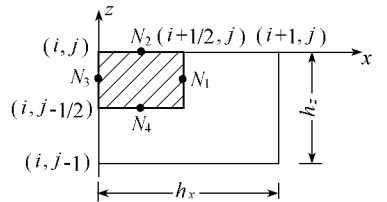


图4 左上角结点及其积分区域

Fig.4 Node on left upper corner and integral region

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_{i,j}-w_{i,j-1}}{4}h_x+\nu\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{4}h_z-\frac{1-\nu^2}{4E}\sigma_{i,j}h_xh_z &= 0 \\ \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{4}h_x+\frac{w_{i+1,j}-w_{i,j}}{4}h_z-\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{i,j}\frac{h_xh_z}{4} &= 0 \\ \frac{\sigma_{i,j}-\sigma_{i,j-1}}{4}h_x+\frac{\tau_{i+1,j}-\tau_{i,j}}{4}h_z+(F_z)_{i,j}\frac{h_xh_z}{4} &= 0 \\ \frac{\tau_{i,j}-\tau_{i,j-1}}{4}h_x+E\frac{h_z}{2h_x}(u_{i+1,j}-u_{i,j})+\nu\frac{\sigma_{i+1,j}+\sigma_{i,j}}{4}h_z+(-\sigma_x)_{i,j}\frac{h_z}{2}+(F_x)_{i,j}\frac{h_xh_z}{4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式(22)即为左上角结点的差分格式.类似可得其余 3 个角结点的差分格式.

由各结点的差分方程组装可得整体列式,对整体列式进行求解即可得到具有应力边界条件的弹性力学问题的数值解.

2 算 例

为验证辛体系差分法的正确性,编程对算例进行了计算.

例 1 如图5 所示,杆件均匀受拉,杆件长  $l=1\text{ m}$ ,高度  $h=0.2\text{ m}$ ,两端荷载集度为  $q=100\text{ MPa}$ ,材料的弹性模量  $E=200\text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu=0.26$ ,位移约束为左端固定铰支座,右端可动铰支座,即  $w(0,0)=u(0,0)=w(0,l)=0$ .

此例的弹性力学解析解为  $\sigma_x=100\text{ MPa},\sigma_z=0,\tau_{xz}=0,w=-\nu qz/E,u=qx/E$ . 分别用  $2\times 2$  网格( $h_x=0.5\text{ m},h_z=0.1\text{ m}$ )、 $4\times 4$  网格、 $8\times 8$  网格进行计算,其应力和位移均与弹性力学解析解完全相同.

例 2 简支梁受均布荷载  $q=100\text{ kN/m}^2$ ,跨度  $l=18\text{ m}$ ,高度  $h=3\text{ m}$ ,如图 6 所示. 材料的弹性模量  $E=20\text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu=0.167$ ,梁厚  $1\text{ m}$ . 作为平面应力问题.

文献[6~8]中曾用传统有限元法和辛体系有限元法进行了计算,为了便于比较,这里用  $24\times 6$  网格( $h_x=0.75\text{ m},h_z=0.5\text{ m}$ ,网格划分与文献[7]相同)和  $24\times 24$  网格( $h_x=0.75\text{ m},h_z=0.125\text{ m}$ )分别进行计算. 应力和位移的计算结果分别列于表 1 和表 2 中. 从表中计算结果可看出,采用  $24\times 6$  网格计算时应力误差较大,而采用  $24\times 24$  网格计算时应力和位移均接近于解析解.

表 1 例 2 中  $x=0$  截面上的  $\sigma_x$

Table 1  $\sigma_x$  on section  $x=0$

| 结点的<br>$z/\text{m}$ | 解析解<br>$\sigma_x/\text{MPa}$ | Lagrange 体系有限元法<br>(矩形双线性单元) | 辛体系有限元法               | 本文方法 $\sigma_x/\text{MPa}$ |            |
|---------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|----------------------------|------------|
|                     |                              | $\sigma_x/\text{MPa}$        | $\sigma_x/\text{MPa}$ | 24 × 6 网格                  | 24 × 24 网格 |
| 1.5                 | − 2.72                       | − 2.65                       | − 2.60                | − 3.00                     | − 2.74     |
| 1.0                 | − 1.80                       | − 1.74                       | − 1.98                | − 1.90                     | − 1.80     |
| 0.5                 | − 0.89                       | − 0.85                       | − 1.09                | − 1.00                     | − 0.90     |
| 0                   | 0                            | 0                            | 0                     | 0                          | 0          |
| − 0.5               | 0.89                         | 0.85                         | 1.09                  | 0.99                       | 0.89       |
| − 1.0               | 1.80                         | 1.74                         | 1.98                  | 1.99                       | 1.80       |
| − 1.5               | 2.72                         | 2.65                         | 2.60                  | 3.00                       | 2.72       |

例 3 简支梁在中点受集中荷载  $P=2\text{ kN}$ ,跨度  $l=2\text{ m}$ ,高度  $h=0.25\text{ m}$ ,如图 7 所示. 材料的弹性模量  $E=200\text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu=0.26$ . 作为平面应力问题.

用  $40\times 20$  网格( $h_x=50\text{ mm},h_z=12.5\text{ mm}$ )进行计算,集中力看成作用点邻近区间( $-h_x/2\leq x\leq h_x/2$ )内的均布荷载.  $x=0$  截面上应力和中间层( $z=0$ )位移的计算结果分别列于表 3 和表 4. 表中 Lagrange 体系有限元法的网格划分与本文方法相同.

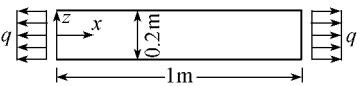


图 5 杆件均匀受拉

Fig.5 Bar subjected to uniform tensile load

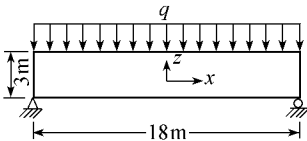


图 6 简支梁受均布荷载

Fig.6 Simply-supported beam subjected to uniformly distributed load

表 2 例 2 中间层( $z=0$ )的位移  $w$

Table 2  $w$  on middle layer ( $z=0$ )

| 结点的<br>$x/\text{m}$ | 解析解<br>$w/\text{mm}$ | 本文方法<br>$w/\text{mm}$ |
|---------------------|----------------------|-----------------------|
| -9                  | 0                    | 0                     |
| -6                  | -1.58                | -1.67                 |
| -3                  | -2.71                | -2.85                 |
| 0                   | -3.12                | -3.27                 |
| 3                   | -2.71                | -2.85                 |
| 6                   | -1.58                | -1.67                 |
| 9                   | 0                    | 0                     |

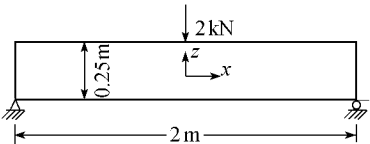


图 7 简支梁受集中荷载

Fig.7 Simply-supported beam subjected to concentrated load

表 3 例 3 中  $x = 0$  截面上的  $\sigma_x$

Table 3  $\sigma_x$  on section  $x = 0$

| 结点的<br>$z/\text{mm}$ | Lagrange 体系有限元法<br>$\sigma_x/\text{MPa}$ | 本文方法 ( $40 \times 20$ 网格)<br>$\sigma_x/\text{MPa}$ |
|----------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 125                  | -113.5                                   | -114.3                                             |
| 100                  | -74.9                                    | -78.0                                              |
| 50                   | -33.8                                    | -36.8                                              |
| 0                    | 1.5                                      | 0.8                                                |
| -50                  | 36.5                                     | 37.7                                               |
| -100                 | 73.3                                     | 76.3                                               |
| -125                 | 93.2                                     | 97.2                                               |

表 4 例 3 中中间层 ( $z = 0$ ) 的位移  $w$

Table 4  $w$  on middle layer ( $z = 0$ )

| 结点的<br>$x/\text{m}$ | Lagrange 体系有限元法<br>$w/\text{mm}$ | 本文方法 ( $40 \times 20$ 网格)<br>$w/\text{mm}$ |
|---------------------|----------------------------------|--------------------------------------------|
| -1.00               | -0.02                            | 0                                          |
| -0.50               | -0.93                            | -0.92                                      |
| -0.25               | -1.23                            | -1.23                                      |
| 0                   | -1.35                            | -1.35                                      |
| 0.25                | -1.23                            | -1.23                                      |
| 0.50                | -0.93                            | -0.92                                      |
| 1.00                | -0.02                            | 0                                          |

从表中结果看,  $x = 0\text{ m}$  截面上各结点的应力值  $\sigma_x$  和中间层的位移值  $w$  均与 Lagrange 体系有限元法的计算结果接近, 说明集中荷载用局部的均布荷载替代后方法也有效.

3 结 语

辛体系中的有限差分法用对偶的二类变量进行求解, 能较好地处理复杂的边界条件, 可直接求得位移和应力. 本文对弹性力学辛差分法进行了初步探讨, 建立了弹性力学应力边界问题的直角坐标辛差分格式, 从理论推演和算例结果看, 有限差分法引入辛体系是可行的, 为辛体系的数值解法提供了一种新的方法, 对于具有位移边界条件的情形 (将另文给出) 也有参考价值.

虽然推导是在各向同性平面应力问题上进行的, 但不难推广到其他情况. 本文只讨论了规则区域的情形, 相信随着研究的深入, 非矩形区域的差分格式将被建立, 从而为解决复杂工程问题提供一种新途径.

参考文献:

[1] 徐芝纶. 弹性力学 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1990. 34—254.  
[2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. 37—238.  
[3] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 47—211.  
[4] 周建方, 卓家寿. 极坐标下弹性力学的一个新解答 [J]. 力学学报, 2001, 33(6): 839—846.  
[5] 邹贵平, 唐立民. 复合材料条形域问题的混合状态 Hamiltonian 元的半解析解 [J]. 力学与实践, 1993, 15(6): 29—34.  
[6] 周建方, 卓家寿, 李典庆. 基于 Hamilton 方法的有限元 [J]. 河海大学常州分校学报, 2000, 14(3): 1—6.  
[7] 卓家寿. 弹性力学中的有限元法 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1990. 71—73.  
[8] 江理平, 唐寿高, 王俊民. 工程弹性力学 [M]. 上海: 同济大学出版社, 2002. 242—245.

Symplectic difference format for elasticity problems  
under stress boundary condition

ZHU Bing-qi<sup>1</sup>, ZHOU Jian-fang<sup>1</sup>, ZHUO Jia-shou<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical & Electrical Engineering, Hohai Univ., Changzhou 213022, China;  
2. College of Civil Engineering, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

**Abstract:** By introduction of the finite difference method into the Symplectic system of mechanics of elasticity, a Symplectic difference format for plane rectangular coordinates was developed for elasticity problems under stress boundary condition. From the format, the displacement and stress can be obtained with dual variables. Calculation examples show that the Symplectic difference method is effective, providing a new calculation method for the Symplectic system of mechanics of elasticity.

**Key words:** Symplectic system of mechanics of elasticity; finite difference method; stress boundary; rectangular coordinates; Symplectic difference format