

线性规划问题的多重解及其寻求

叶秉如¹, 董增川¹, 许静仪¹, 陈乐湘¹, 叶宇达²

(1. 河海大学水资源环境学院, 江苏 南京 210098; 2. 南京大学现代分析中心, 江苏 南京 210093)

摘要 利用线性规划新解法——分解筛选法的解题特点, 对线性规划实际存在的多重解问题进行分析, 提出了多重解的两大类型, 即相似性重解(又称重解 I 型)和无关性重解(又称重解 II 型), 研究了它们产生的充要条件, 特别是研究了这两类多重解通解(general solution)的求解方法和一些相应的算例, 并对多重解实际应用上的重要之处进行了扼要论述。

关键词 线性规划; 多重解; 通解

中图分类号 :O151.2 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2005)02-0224-08

1 线性规划多重解的研究概况及其重要实用意义

线性规划(LP)的多重解(multivalued solution)研究是本文提出的一个新课题。在研究线性规划解法的半个多世纪中, 涉及这方面问题的文献所见不多。在线性规划传统解法——单纯形法的研究和介绍中, 一般也只是把线性规划的多重解归之为“有退化情况”或“有重解可能”等, 而很少进行深入研究。这主要是由于单纯形法解题的特定思路、构架及其在这方面的局限所致。

针对这一情况, 利用近年在国内外有关学术会议和学术刊物上所提出的分解筛选法^[1]的解题特点, 对多重解问题进行了较细致的分析研究, 提出了其求解方法, 并介绍了相应的新概念和新成果。

多重解问题之所以重要, 是因为线性规划的最优解不少时候可能在约束凸集的某一边线上, 甚至某一边平面上, 这种情况下, 就呈现有多个(实际上是无数个)同值的最优解, 简称为多重最优解或多重解。因为在许多工程规划或设计问题中, 往往希望有变量的多种组合方案, 以便能进行多方比较来选出最后的更好的方案, 而线性规划多重解的存在, 使相同最优值下构建各种可行比较方案成为可能, 为决策提供了广泛的选择余地, 故其实用意义十分明显。

2 多重解的分类和特性

2.1 分类

多重解可分为两大类。

第一类为“相似性重解”, 又称重解 I 型, 是由于目标函数超平面(二维问题时为直线)与某一约束式(设为 j_0)相似, 其各相应变量的系数之比具同一比值 R_M 。例如

$$\frac{C_i}{A_{ji}} = R_M \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = j_0, \text{为某一特定有效约束}) \quad (1)$$

式中 R_M 为某一正值常数。

该相似性重解又可细分为: 二维线性相似性重解(简称线性重解), 三维平面相似性重解, ……以至最高级的 n 维超平面相似性重解(简称 n 超平面重解)。这些各种级别的重解, 在分解筛选法中, 是由于某一级(即第 K 轮)的子新 LP 问题, 出现上述 $O.F.$ (目标函数)式与某一约束相似而造成(参见下面的实例)的。自然, 级别(即维数)愈高的重解, 其重解以离散值表达的可能数目(如果以固定的变量差值 Δx_i 来选取和衡量可能方案)就愈多, 一般该数目随重解维数 n' 的指数(例如二次方)增加。

对于相似性重解,在用分解筛选法解 LP 问题时,一般计算完出现相似性重解后的那一轮,运算筛选就可基本结束而直接导出其中某一组重解,或这些主重解变量的可能范围.由这些主重解变量的一组互联值,通过筛选法中的回代计算,可得出整组 n 个变量的一个重解,也可得出全部重解的各变量数值表达式——通解,见例 3.

第二类为“无关性重解”,即重解 II 型.它多半是由于某变量在目标函数式的系数 C_i 为零,但在约束条件组中,却仍起一定的约束控制作用.这种控制性作用,多半属于松弛性.例如在 1 个小于或等于约束式中,为了使解最优,要求该重解变量取某一小于或等于 Δb 的值,这时该变量的重解就可能是 $0 \sim \Delta b$ 之间的任一值,它们对目标函数的最优值 Z^* 无影响(见例 4).无关性重解与相似性重解不同的是重解变量只限于 1 个(或少数几个),而相似性重解则 n 个变量可能有不同的重解值.

2.2 相似性重解的一个简单算例

例 1

$$\begin{aligned} \text{求 } \max Z &= x_1 + 3x_2 + 2x_3 & (2) \\ \text{s. t. } 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 10 & (3) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 15 & (4) \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 8 & (5) \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

此 LP 问题之目标函数系数与约束式(4)完全相同,故应为重解 I 型.现证明之.

对上述 LP 问题用分解筛选法求解,见表 1.表中“ $\checkmark$ ”号者为该列最小值, C_i 为目标函数系数^[1].由表 1 知解通过式(4)及 x_3 为消元变量,故由式(4)得

$$x_3 = 7.5 - \frac{1}{2}x_1 - 1.5x_2 \geq 0$$

(6)

将式(6)代入式(2)(3)(5),有

$$\max Z = 15$$

(7)

$$\text{s. t. } 1.5x_1 - 2.5x_2 \leq 2.5$$

(8)

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8$$

(9)

因式(7)中已无任何变量,故最优解为重解 $Z^* = 15$,且满足式(5)(6)(8)的解都是最优解.式(6)可化简为

$$\frac{x_1}{2} + 1.5x_2 \leq 7.5$$

(10)

式(10)较式(5)远为严厉,即式(5)为非控制性约束,故满足式(8)(10)即可^①.

举例言之, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 满足式(8),亦满足式(10).于是,回代至式(6),有 $x_3 = 7.5$.此即为一组重解值.由式(2)可知,其 $Z^* = 15$.又如,由式(10),如令 $x_1 = 0$,则有 $x_2 \leq 5$.回代至式(6),有 $x_3 = 7.5 - 7.5 = 0$.此为另一组重解值.由式(2),亦有 $Z^* = 15$.概括言之,由联解式(8)(10)所得变量之下列值域均为重解值,即 $x_1 = 0 \sim 6.428, x_2 = 0 \sim 2.857$ 且满足式(8)(10),而 $x_3 = 7.5 - \frac{1}{2}x_1 - 1.5x_2$ (式(6)).

以上诸式显示了该三维多重解变量可取值的范围,而重解值同为 $Z^* = 15$.此 Z^* 值实际上就是约束式(4)之右端常数项值 B_{j0} .

由新 LP 之式(7),亦可知,在有重解处,对该目标式微分时必有

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = 0$$

(11)

式中 x_i 为某射影轴^[2].

上述导数式亦符合各重解间 Z^* 值不变这一重要概念.

表 1 例 1 分解筛选

Table 1 Decomposition-screening scheme for Ex.1

约束式	截点		
	x_1	x_2	x_3
(3) $\leq$	5 $\checkmark$		10
(4) $\leq$	15	5	7.5 $\checkmark$
(5) $\leq$		4 $\checkmark$	
C_i	1	3	2
$Z_{初i}$	5	12	15(max)

① 也可不引入式(10),仅满足式(5)(8)两式,而由回代式(6)对 x_3 的非负要求来求出同样的结果.

3 重解 I 型——相似性重解

3.1 相似性重解之充要条件

如前所述,相似性重解存在的条件是在筛选分解某一轮中,目标函数式之系数与某一约束条件之系数成同一比值,即满足式(1),但这仅是一个必要条件,出现重解的另一条件是该相似之约束必须是有效的,是起控制作用的约束,此为充分条件,现举例说明。

如果将例 1 中约束式(3)改为

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6$$

(12)

其余式均不变,则由表 2 可知,最优解通过式(12)和 x_3 ,故解出 x_3 :

$$x_3 = 6 - x_1 - 3x_2$$

(13)

代入式(2)(4)(5),有

$$\max Z = 12 - x_1 - 3x_2$$

(7')

$$\text{s.t.} \quad -x_1 - 3x_2 \leq 3$$

(6')

$$x_1, x_2 \geq 0$$

由式(7')、式(6')和未变之原式(5)组成的新 LP 模型中,式(6')必能满足,故可删去。于是, x_2 符合退化 I^[1],所以 $x_2 = 0$ 。故又有 $x_1 = 0$ 。回代至式(13),有 $x_3 = 6$,而 $Z^* = 12$,此解(0 0 6)为唯一之最优解,并无其他多重解存在。其原因是由于更严厉的约束式(12)的引入,式(4)已成为无效约束,上述充要条件之论断得证。

3.2 重解 I 型的副类——重解 I_a 型

上面介绍的重解 I 型,实际上并未完全包括该类型的可能重解。对于一个多维 LP 问题,当进行第一轮筛选时,如果有非零之 $Z_{\text{初}m}$ 出现在 2 列或 2 列以上,且相应约束为同一个时,说明该约束在该 2 列(或 2 列以上)之变量上与目标函数并行(相似),此时就会在该 2 列(或 2 列以上)变量上存在 I 型重解,称为局部性相似特征,为重解 I_a 型。这样的情况,也可出现在分解筛选的其他轮次,情况亦同。下面举例说明。

例 2

$$\max Z = 12x_1 + 6x_2 + 10x_3$$

(14)

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

(15)

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 9$$

(16)

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$

(17)

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

对上述 LP 问题进行筛选,见表 3。由表 3 知 $Z_{\text{初}m}$ 在 x_1 和 x_2 列,且相应约束条件同为式(17),故与前面所说的重解 I_a 型情况相符。下面试解该算例。

可由式(17)先消去 x_1

$$x_1 = 2.5 - 0.5x_2 - x_3$$

(18)

代入其他诸式,得

$$\max Z' = 30 - 2x_3$$

(19)

$$\text{s.t.} \quad 2x_2 + 3x_3 \leq 11$$

(20)

$$-2.5x_2 + x_3 \leq 1.5$$

(21)

因为 x_3 符合退化 I,所以 $x_3^* = 0$ 。将此 x_3 值代入式(21),显然式(21)是必可满足的无效约束,故可删去。从而又知 x_2 符合退化 I。令 $x_2^* = 0$,回代之有 $x_1^* = 2.5$,所以 $Z^* = 30$,解为 $(x_1, x_2, x_3)^* = (2.5, 0, 0)$ 。

但此仅为一个解,不难设想,如果前面运算时先消去 x_2 ,则将得另一些重解,如

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 5, 0)$$

(22)

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$$

(23)

表 2 相似性重解充要条件
算例分解筛选

Table 2 Decomposition-screening scheme
for the example demonstrating the necessary
and sufficient conditions for the existence of
multivalued solution of similar type

约束式	子 LP		
	x_1	x_2	x_3
(12)	6✓	2✓	6✓
(4)≤	15	5	7.5
(5)≤		4	
C_i	1	3	2
$Z_{\text{初}i}$	6	6	12(max)

表 3 例 2 分解筛选

Table 3 Decomposition-screening
scheme for Ex. 2

约束式	子 LP		
	x_1	x_2	x_3
(15)≤		6	6
(16)≤	3		2.25✓
(17)≤	2.5✓	5✓	2.5
C_i	12	6	10
$Z_{\text{初}i}$	30(max)	30(max)	22.5

等 均满足式(14)~(17)的约束式, 并有同值 $Z^* = 30$. 故此算例是具二维重解 I_a 型的线性规划问题.

例 2 具重解 I_a 型之证明, 亦可采用更简单的论证. 因 x_3 符合分解筛选法退化 I 之条件, 故必有 $x_3^* = 0$. 据此在式(14)~(17)中删去全部有 x_3 之项后, 所余式(14)与式(17)完全相似, 且其余两约束式(24)(25), 即

$$-2x_1 + x_2 \leq 6 \tag{24}$$
$$3x_1 - x_2 \leq 9 \tag{25}$$

因都较 x_3 为零之式(17)之约束为宽松, 故同为无效约束. 证毕.

3.3 相似性重解之第二个典型例子及其通解

作为重解 I 型的 LP 模型, 其实并不一定要像有些算例那样, 其系数矩阵有严格或明显的规律性. 举一个表面看来没有规律性系数的例子.

例 3

$$\text{求 max } Z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \tag{26}$$
$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 24 \tag{27}$$
$$x_1 + 4x_2 + 5.5x_3 + 2.5x_4 \leq 34 \tag{28}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 \tag{29}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

用分解筛选法求解, 先列出筛选表 4. 由表 4(a)可知解通过式(28)和 x_2 . 由式(28)解 x_2 :

$$x_2 = 8.5 - 0.25x_1 - 1.375x_3 - 0.625x_4 \tag{30}$$

将式(30)代入其余诸式, 得第二轮之新 LP.

求 $\text{max } Z = 0.25x_1 - 0.125x_3 + 0.125x_4 + 25.5 \tag{31}$
$$\text{s.t. } 0.5x_1 - 4.75x_3 + 1.75x_4 \leq 7 \tag{32}$$
$$0.75x_1 - 0.375x_3 + 0.375x_4 \leq 7.5 \tag{33}$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 3, 4$$

对该新 LP, 由表 4(b)筛选知解通过式(33)及 x_1 ; $Z_{\text{初max}} = 2.5$. 同时可发现到此第二轮时, 目标函数式(31)与约束式(33)完全相似, 故知此实例有多重解, 且属三维重解 I 型, 最优解 $Z^* = 25.5 + 2.5 = 28$. 一组可

能的重解值, 由表 4(b)及式(30)可得 $x_1 = 10, x_2 = 8.5 - 2.5 = 6, x_3 = x_4 = 0$. 至此, 分解筛选结束, 不必再筛选. 下面继续分析、寻求通解情况.

3.3.1 多重解通解之一般构成及求解

前已言之, 当用分解筛选法筛选到某一轮, 出现某有效约束与目标函数式相似时, 即表明有相似性重解存在. 此时如果除相似性约束外, 已无其他有效约束, 则此相似性约束连同几个回代方程构成的联立方程组, 即代表该相似性重解的通解构成形式. 如果在某一轮中, 除相似性约束外, 尚有其他的有效约束, 则通解中还应包括这些约束, 并共同联立求解. 以例 3 看, 由于第二轮新 LP 模型已出现相似性约束, 且还有其他的有效约束式(32), 故该算例之通解为由相似性约束式和回代方程

$$0.75x_1 - 0.375x_3 + 0.375x_4 = 7.5 \tag{34}$$

$$x_2 = (8.5 - 0.25x_1 - 1.375x_3 - 0.625x_4) \geq 0 \tag{35}$$

以及式(32)组成的联立方程组. 满足该方程组的一切变量组合均属于同一最优值之多重解范围, 或者说, 由此通解可解出各种多重解组合方案.

3.3.2 求重解可行解步骤

- a. 可由式(34)任给两变量以非负之适当值(参照 3.3.3 节之各变量值域), 然后由式(34)解另一变量值.
- b. 如果另一变量值大于或等于 0 且在该变量值域内, 则再将 3 变量值代入式(35)和式(32), 如得 $x_2 \geq 0$ 且亦满足式(32), 即为一个可行的重解组合.

表 4 例 3 分解筛选

约束式	子 LP _i			
	x_1	x_2	x_3	x_4
(27)≤	24	12		8✓
(a) (28)≤	34	8.5✓	6.1818✓	13.6
(29)≤	16✓	16	16	16
C_i	1	3	4	2
$Z_{\text{初}i}$	16	25.5 (max)	24.72	16
(b) (32)≤	14		-1.473	4✓
(33)≤	10✓		-20	20
C_i	0.25		-0.125	0.125
$Z_{\text{初}i}$	2.5 (max)			0.5

3.3.3 变量值域(上下限)分析

一种较简单的分析方法是先只考虑相似方程和回代方程. 由式(34)和式(35)可知各变量可能上限分别为

$$\begin{array}{l|l} \text{先由式(35): } x_1 \leq 34 & \text{由式(34): } x_1 \leq 12^{\checkmark} \\ x_2 \leq 8.5^{\checkmark} & \\ x_3 \leq 6.8^{\checkmark} & \\ x_4 \leq 13.6^{\checkmark} & x_4 \leq 18 \end{array}$$

此由式(35)所得可能上限系由式(35)将 $\geq$ 号左端相应变量项移至 $\geq$ 之右,并令同号之其余变量均为零而得,比较简单.

而由式(34)所得可能上限,变量 x_3 在式(34)中为负号,故其上限只需由式(35)决定. x_2 之上限为非自由变量(即回代时才决定的变量),故由式(35)即可决定.对上面右半列中 x_1 和 x_4 之上限值推求略为复杂,阐述如下(因式(34)中 x_3 是负系数).

先由式(34)令 $x_1 = 0$,得

$$x_3 = x_4 - 20 \quad (36)$$

将式(36)代入令 $x_1 = 0$ 的不等式(35),有

$$2x_4 \leq 20 \times 1.375 + 8.5 = 36$$

所以

$$x_4 \leq 18$$

上限为18.同理可求 x_1 之上限.即在式(34)(35)中均令 $x_4 = 0$,由式(34)解出 $x_3 = 2x_1 - 20$,再代入式(35)得 $3x_1 \leq 36$,所以 $x_1 \leq 12$,即为 x_1 之上限值.

左右两列变量可能之上限值均求出后,取两列中小者,即为欲求之上限.前面两列中有“ $\checkmark$ ”(12, 8.5, 6.8, 13.6)者为上限值.下限均为零.

概括言之,求上限值之通用方法是:

a. 对非负约束 $\geq$ 号的回代式(可以不止1个),先尽可能求出“各”变量的可能上限值.

b. 对有负系数项(例如 x_3)之相似性约束式(式(34)),令正系数之变量之一(例如 x_4)不等于零,其余变量均为零,消去负系数之变量(即 x_3).于是可由式(35)解出该正系数变量(x_4)之上限.

如果相似性约束式中均为正系数,则问题简单,可仿式(35)之法求得其上限值系列,然后取左右两列之小者.

根据所求得的值域,决策者就可根据其他考虑条件和目标,选那些变量取高值,以求出更满意的变量组合方案.这样求出的变量组合,还须代入其他约束式(如果有),看其是否满足.

3.3.4 可行解实例

按3.3.2节所述方法,可求例3各种可行解如下:

a. 设 $x_3 = 1$, $x_4 = 1$,则 $x_1 = 10$,代入式(35)得 $x_2 = 4$,且满足诸约束, $Z^* = 10 + 12 + 4 + 2 = 28$,均对!

b. 令 $x_3 = 0$, $x_4 = 4$,则由式(34)得 $x_1 = 8$;由式(35)得 $x_2 = 4$,所以解为(8, 4, 0, 4),但此解不满足式(32),故不可行.

c. 根据其他条件,或决策者的希望, x_1 愈大愈好,则可取 $x_1 = 12$ (上限值),然后求出重解组(12, 0, 4, 0),均满足诸约束及 $Z^* = 28$.

3.4 相似性重解之求解方法小结和子程序编制要点

对于相似性重解,主要在于识别是否有某一约束之系数与目标函数式之系数成相似比例,且为有效.但由于对于一个 n 维LP问题,相似性可能存在于低于 n 维的子空间,故不能光从原始的LP模型来判断有无重解存在.对于有效约束问题,一般除了明显为不控制者外,也常需要到求出最优解(或最优解之一)后才能知道该约束式是否通过最优解角点(或边线等).但是在用分解筛选法求解LP问题时,这两个问题都在逐轮运算过程中自然解决,故比较方便.但应首先判别有无相似性重解存在,这就需要在用计算机运算时程序中插入一段在每一轮均计算系数比值的子程序.当指示有重解存在时,一般可在基本运算结束后,再进一步求出现重解那一轮的相似性约束式、目标式,还未筛选掉的有效约束(如果有)以及前几轮的回代方程,然后由

这些通解构成式求各变量值域,如例 3.

另外,还应提及的是:多年来,介绍线性规划问题的许多中外著作大都认为线性规划的解共有 3 类,即无解、无界和有定值解.此论断不够确切.准确地说,线性规划的解应该有 4 种,第 4 种就是多重解.

4 重解 II 型——无关性重解

4.1 无关性重解的特点

无关性重解的特点有二 (a)在目标函数式中系数 C_0 为零 (b)在一些有效约束式中,无关性重解可能起辅助性控制作用.这类重解问题比较简单,由于与目标值无直接关系,故只影响个别重解变量本身,重要性不如重解 I 型.但其出现机会较重解 I 型多.

4.2 无关性重解求解要点

在用分解筛选法求解 LP 问题,运算筛选到末一轮时,如果此 $C(I^0)=0$ 的变量仍在余留的约束式中存在,则多半有重解,可求之.电算时则可根据系数 $A(J,I^0) \neq 0$ 编制出鉴别子程序.现举例说明.

例 4

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -3x_1 - 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 0.75x_1 + 1.5x_3 = 3 \\ & 0.5x_1 - 0.67x_2 + 0.5x_3 \leq 2 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

(37)

(38)

(39)

先把以上模型化为求最小问题,即求

$$\min -Z = 3x_1 + 4x_3$$

(40)

表 5 例 4 化为求最小问题后分解筛选

Table 5 Solution of min for Ex.4

约束式	x_1	x_2	x_3
式(38)	4		2
C'_i	3	0	4
$Z_{初i}$	12		8(min)

$$x_3 = 2 - \frac{x_1}{2}$$

(41)

将式(41)代入式(40)及式(39),得

$$\min -Z = 8 + x_1$$

(42)

$$0.25x_1 - 0.67x_2 \leq 1$$

(43)

上模型中 x_1 符合退化 I,故 $x_1^* = 0$.代入式(43)后知存在 x_2 且 $x_2^* = 0 \sim \infty$ 中的任意值.回代至式(41),有

$$x_3^* = 2 \quad z^* = -8$$

在此题中, x_2 实际上不起多少辅助性控制作用.

例 4 为重解 I 型比较简单的情况.实际上重解 II 型与重解 I 型一样,有二维甚至更多维的重解情形.也就是说,当 LP 模型中有 2 个甚至 2 个以上的变量时,其目标函数中系数 $C_i = 0$,并在某些有效约束方程中起辅助性的控制作用.试以例 5 来证实和说明之.

例 5

$$\begin{aligned} \text{求 } \min G = & 100x_5 + 100x_6 + 60x_7 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_6 \geq 25 \\ & x_1 - x_2 + x_7 \geq 15 \\ & x_3 + x_4 + x_6 \geq 10 \\ & x_3 - x_4 + x_7 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 - x_5 \leq 15 \\ & 3x_4 - x_5 \leq 30 \\ & x_5 \leq 40 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 7) \end{aligned}$$

(44)

(45)

(46)

(47)

(48)

(49)

(50)

(51)

另外,有 $x_6 \geq 0, x_7 \geq -10$ 两式,因不起作用,已从模型中剔去.

先检视上述模型有无退化 I (—无),故可列筛选表 6.表 6 中凡大于或等于约束之系数为负或零者可不计算其截值.因为解在第一象限并设定为有界,故截值为负或 ∞ 者,可认为解不在第一象限或无界.

从表 6(a)诸列中选最大者(“ $\checkmark$ ”所示),乘以 C_i 值即得 $Z_{初i}$ 值.再从该 $Z_{初i}$ 行选最小者,为 x_1, x_2, x_3, x_4

表6 例5首轮分解筛选
Table 6 Decomposition-screening scheme for Ex.5(the first round)

子 LP	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
(45) $\geq$	25 $\checkmark$	25/3 $\checkmark$				25 $\checkmark$	
(a) (46) $\geq$	15						15 $\checkmark$
(47) $\geq$			10 $\checkmark$	10 $\checkmark$		10	
(48) $\geq$			0				0
(49) $\leq$	15	15					
(b) (50) $\leq$				10			
(51) $\leq$					40		
C_i	0	0	0	0	100	100	60
$Z_{初i}$	$\alpha(\min)$	$\alpha(\min)$	$\alpha(\min)$	$\alpha(\min)$		2 500	900

4 列. 因相应之约束均在式(45)(47)行, 故可任取其二, 如 x_1, x_3 为消元变量, 并由式(45)(47)联解得

$$x_1 = 25 - 3x_2 - x_6 \tag{52}$$
$$x_3 = 10 - x_4 - x_6 \tag{53}$$

由式(52)(53)得 x_1, x_3 值. 代入其他诸式, 整理后得与式(44)(50)(51)组成的新的降维后之模型

$$\text{s.t.} \quad 2x_2 + x_5 + x_6 \geq 10 \tag{54}$$
$$4x_2 + x_6 - x_7 \leq 10 \tag{55}$$

其中经代入式(48)后的新式与式(55)相比, 因不起控制作用, 故略去. 未列.

对上述新 LP 再作分解筛选, 见表 7. 由表 7 知, 最小 $Z_{初i}$ 在 x_2 列和式(54), 故知解通过式(54)且截值大于或等于 5 与式(55)小于或等于 2.5 矛盾, 属于退化 II. 由于只有单一大于或等于约束, 为选副变量 SI , 以求两约束线之交点 P , 应按文献[1]中类似之 RA_i 比值最大来选出 SI . 从 x_5, x_6 两列看, x_5 列之 $RA_i = \infty$ (最大) 故 x_5 为副变量, 并由式(54)(55)作二维分解, 得二元联立方程组

$$\begin{cases} 2x_2 + x_5 = 10 \\ 4x_2 = 10 \end{cases} \tag{56}$$

解式(56)得 $x_2 = 2.5, x_5 = 5$, 其余 $n - m(7 - 4 = 3)$ 个变量为零, 即 $x_4 = x_6 = x_7 = 0$. 此解满足上述新 LP 模型之全部约束, 故为最后解. 回代至式(52)(53), 有

$$x_1 = 25 - 7.5 = 17.5 \quad x_3 = 10$$

连同已求得的其他诸变量值代入目标函数式(44), 得

$$G = 500$$

上述 $x_3 = 10$ 和 $x_4 = x_6 = x_7 = 0$ 的解, 从式(47)(48)来看远不受常数项 10 的限制, $x_3 = 10 \sim \infty$ 的值均能满足各约束式. 故 x_3 有无关性重解. 如进一步分析, x_4 并不只有零值, 也可以有 $0 \sim 35/3 = 11.67$ (由式(50)得), 因此 x_4 也有无关性重解的性质, 而整个问题就成为一个求二维无关性重解的通解问题.

在一些筛选法解 LP 的多功能电算程序中, 通常在运算过程中能提示可能存在无关性重解的重要信息, 此处不详述. 下面继续分析如何求出二维无关性重解的通解.

前面已分析了重解变量为 x_3 和 x_4 在初始模型式(44)~(51)中仅与式(47)(48)(50)有关. 由式(50), 因 $x_5 = 5$, 故有

$$x_4 \leq \frac{35}{3} = 11.667$$

将 $x_7 = 0$ 代入式(48), 有

$$x_3 - x_4 \geq 0$$

即

表7 例5第二轮筛选
Table 7 Decomposition-screening scheme for Ex.5(the second round)

子 LP	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7
(54) $\geq$	5 $\checkmark$		10	10	
(55) $\leq$	2.5			10	
(50) $\leq$		7.5			
(51) $\leq$			40		
C_i	0	0	100	100	60
$Z_{初i}$	$\alpha(\min)$		1 000	1 000	

$$x_3 \geq x_4$$

(57)

由式(47) ,有

$$x_3 + x_4 \geq 10$$

(58)

式(57)(58)与前已求出的 x_3, x_4 的值域
 $x_3 = (\text{实为 } 5) \sim \infty \quad x_4 = 0 \sim 11.667$

一起构成了二维无关性重解变量 x_3, x_4 的解的通式.

例如 ,取 $x_3 = 10, x_4 = 0$,它们满足上列 3 条件 ,故为一个解 ,它是 x_4 取尽量小的方案 .如果希望 x_4 愈大愈好 ,则可取 $x_4 = 11.667, x_3 \geq 11.667$.如果希望 x_3 愈小愈好 ,则根据式(57)(58)限制 ,应取 $x_3 = 5, x_4 = 5$,这也满足上面 3 条件 .至于其他的组合方案 ,可根据规划的具体要求来选择 .

参考文献 :

[1] 叶秉如 ,陈乐湘 .线性规划分解筛选法的理论基础和要点 [J].河海大学学报 ,1997 ,25(1) 87—91 .
[2] 数学手册编写组 .数学手册 [M].北京 :人民教育出版社 ,1979 .342—350 .
[3] 胡运权 ,郭耀煌 .运筹学教程 [M].北京 :清华大学出版社 ,1998 .22—31 .

Multivalued solution of linear program and the way to find it

YE Bing-ru¹ , DONG Zeng-chuan¹ , XU Jing-yi¹ , CHEN Le-xiang¹ , YE Yu-da²

(1. College of Water Resources and Environment , Hohai Univ. , Nanjing 210098 , China ;
2. Center of Material Analysis , Nanjing Univ. , Nanjing 210093 , China)

Abstract :Based on the new method , named the decomposition-screening method , for solving the linear program problem , a detailed analysis was made on the multivalued solution to linear program . Two kinds of multivalued solutions were identified , i . e . the multivalued solution of similar type and the multivalued solution of unrelated type , and the necessary and sufficient conditions for their existence were discussed . Furthermore , the way to find the general solution of the two kinds of multivalued solutions was given together with some interesting examples of each type , and some key points of the multivalued solution in practical application were also briefly discussed .

Key words :linear program ; multivalued solution ; general solution