

GAMMA 型单元及串联系统可靠性的 UMVUE

石春华, 印凡成

(河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 讨论寿命服从单参数 GAMMA 分布单元平均寿命的极大似然估计和一致最小方差无偏估计; 应用 BASU 定理求出了单元可靠度及串联系统可靠度的一致最小方差无偏估计.

关键词: 系统可靠度; 极大似然估计; 一致最小方差无偏估计

中图分类号: O213.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2005)03-0354-03

文献[1]已经研究了基于元件和系统两者的完全样本的对数正态型元件串联系统可靠性的估计, 文献[2]也对双参数指数分布的可靠性评估进行了研究, 但单参数 GAMMA 分布的可靠性估计至今少见有关结论.

1 单元情况

设单元的寿命 $X \sim \Gamma(x; \alpha, \lambda)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自总体 X 的一个样本, 其中 α 已知.

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \quad x \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \theta = \frac{1}{\lambda} > 0 \quad (1)$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \alpha\theta$$

$$D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \alpha\theta^2 \quad (2)$$

当 $\alpha=1$ 时, 即为指数分布. 其联合分布为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i} = \frac{\lambda^\alpha}{[\Gamma(\alpha)]^n} \left[\prod_{i=1}^n x_i \right]^{\alpha-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \quad (3)$$

属于指数族分布.

令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则有

$$T \sim \Gamma(t; n\alpha, \lambda) \quad (4)$$

$$E(T) = n\alpha/\lambda = n\alpha\theta \quad (5)$$

可知 θ 的极大似然估计及其极大似然估计期望为

$$\theta_{MLE} = \frac{T}{n\alpha} \quad (6)$$

$$E(\theta_{MLE}) = \theta \quad (7)$$

即 θ_{MLE} 为 θ 的无偏估计.

$$\text{令} \quad g(T) = \frac{T}{n\alpha} \quad (8)$$

由前知, $g(T)$ 为 θ 的无偏估计, 则 $\alpha g(T)$ 为 $\alpha\theta$ 的无偏估计. 又因为 T 为完备充分统计量, 且 $g(T)$ 为 T 的函数, 故 $\alpha g(T)$ 必为 $\alpha\theta$ 的一致最小方差无偏估计.

引理 1 $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $X_1 \sim \Gamma(x_1; \alpha, \lambda)$, $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $P(X_1 \leq \xi)$ 的一致最小方差无偏估计为 $I_T^\xi(\alpha, (n-1)\alpha)$.

收稿日期: 2004-08-20

作者简介: 石春华(1975-), 男, 江西乐平人, 硕士研究生, 主要从事系统可靠性的研究.

证明 取

$$\tilde{P} = I_{\{X_1 \leq \xi\}} \quad (9)$$

其中 $I_{\{X_1 \leq \xi\}}$ 为示性函数.

可知 $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(t; n\alpha, \lambda)$ 且为完备充分统计量^①

$$\text{则 } E\{\tilde{P}\} = E\{I_{\{X_1 \leq \xi\}}\} = P(X_1 \leq \xi) \quad (10)$$

即 $\tilde{P} = I_{\{X_1 \leq \xi\}}$ 为 $P(X_1 \leq \xi)$ 的无偏估计.

令 $P(T) = E[\tilde{P}|T]$, 可推知

$$P(T) = E[\tilde{P}|T] = E\{I_{\{X_1 \leq \xi\}}|T\} = P\{X_1 \leq \xi|T\} \quad (11)$$

$$P\{X_1 \leq \xi|T = t\} = \begin{cases} 1, & \xi > t \\ P(t), & \xi \leq t \end{cases} \quad (12)$$

当 $\xi \leq t$ 时, 由前知 T 为完备充分统计量. 而 $X_1/T = \lambda X_1/\lambda T$, 显然与 λ 无关, 因此, X_1/T 为辅助统计量.

$$\frac{X_1}{T} = \frac{X_1}{X_1 + X}, \quad (\text{其中 } X' = \sum_{i=2}^n X_i) \quad (13)$$

$$\text{显然 } \lambda X_1 \sim \Gamma(x; \alpha, 1) \quad \lambda T \sim \Gamma(v; n\alpha, 1) \quad (14)$$

$$\text{则 } X' \sim \Gamma(x'; (n-1)\alpha, 1) \quad (15)$$

因此, $Y = \frac{X_1}{T} \sim BE(y; \alpha, (n-1)\alpha)$ 与 λ 无关. 由 BASU 定理^[3]知 $\frac{X_1}{T}$ 与 T 独立.

$$P(t) = P\left\{\frac{X_1}{T} \leq \frac{\xi}{t} | T = t\right\} = P\left\{\frac{X_1}{T} \leq \frac{\xi}{t}\right\} \quad (16)$$

$$\text{即 } P(t) = I_t^\xi(\alpha, (n-1)\alpha) \quad (17)$$

$$\text{其中 } I_t^\xi(\alpha, (n-1)\alpha) = \frac{1}{\beta(\alpha, (n-1)\alpha)} \int_0^{\xi/t} y^{\alpha-1} (1-y)^{(n-1)\alpha-1} dy \quad (18)$$

$$\beta(\alpha, (n-1)\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma((n-1)\alpha)}{\Gamma(n\alpha)}$$

定理 1 $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $X_1 \sim \Gamma(x_1; \alpha, \lambda)$, $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 (a) $I_{\{X_1 > \xi\}}$ 是 $R(\xi)$ 的无偏估计; (b) $E\{I_{\{X_1 > \xi\}}|T\}$ 为 $R(\xi)$ 的一致最小方差无偏估计. 其中 $E\{I_{\{X_1 > \xi\}}|T\} = I_{1-\frac{\xi}{T}}^\xi((n-1)\alpha, \alpha)$.

证明 (a) 显然易证. (b) 由引理 1 及 $I_{1-\frac{\xi}{T}}^\xi((n-1)\alpha, \alpha) = 1 - I_{\frac{\xi}{T}}^\xi(\alpha, (n-1)\alpha)$ 易证.

2 串联系统情况

若有 m 个单元相互独立的串联系统, 其元件寿命服从 $X_j \sim \Gamma(x_j; \alpha_j, \lambda_j)$, 且其样本容量为 m_j , 该完全样本为: $X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jm_j}, j = 1, 2, \dots, m$. 易知 $T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ 为完备充分统计量, 其中 $T_i = \sum_{j=1}^{m_i} X_{ij}$.

定理 2 条件同上, 则串联系统可靠度 $R(\xi)$ 的一致最小方差无偏估计为

$$\prod_{j=1}^m I_{1-\frac{\xi}{T_j}}^\xi((m_j-1)\alpha_j, \alpha_j)$$

证明 因 $\prod_{j=1}^m I_{1-\frac{\xi}{T_j}}^\xi((m_j-1)\alpha_j, \alpha_j)$ 为 $T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ 的函数, 且

$$\begin{aligned} R(\xi) &= P(\min(X_1, \dots, X_m) > \xi) = P(X_1 > \xi, \dots, X_m > \xi) = \\ &= P(X_1 > \xi) \cdots P(X_m > \xi) \end{aligned} \quad (19)$$

又因 $E\{I_{\{X_j > \xi\}}|T\} = I_{1-\frac{\xi}{T_j}}^\xi((m_j-1)\alpha_j, \alpha_j)$ 为 $R_j(\xi)$ 的一致最小方差无偏估计, 而

① 韦博成. 统计推断讲义. 东南大学, 2003.

$$\begin{aligned}
E\{I_{\{\min(X_1, \dots, X_m) > \xi\}} \mid T\} &= E\{I_{\{X_1 > \xi\}}, \dots, I_{\{X_m > \xi\}} \mid T\} = \\
&E\{I_{\{X_1 > \xi\}} \mid T\}, \dots, E\{I_{\{X_m > \xi\}} \mid T\} = \\
&E\{I_{\{X_1 > \xi\}} \mid T_1\}, \dots, E\{I_{\{X_m > \xi\}} \mid T_m\}
\end{aligned} \quad (20)$$

故 $E\{I_{\{\min(X_1, \dots, X_m) > \xi\}} \mid T\} = \prod_{j=1}^m I_{1-\frac{\xi}{T_j}}((m_j - 1)\alpha_j, \alpha_j)$ 为 $R(\xi)$ 的一致最小方差无偏估计.

3 结 语

GAMMA 型单元可靠度的置信下限易于求得. 文献[4]已对有替换定时指数串联系统可靠度的常用的经典评定方法作了比较, 且提出了加权平均和修正加权平均评价方法; 文献[5]则利用参数的最佳线性无偏估计量及最佳线性不变估计量估计出具有位置参数、尺度参数部件的可靠度近似置信下限, 得出了精确置信下限优于近似置信下限的结论. GAMMA 型串联系统可靠度的近似置信下限有待进一步研究.

参考文献:

- [1] 范大茵. 基于元件和系统两者的完全样本的对数正态型元件串联系统可靠性的估计[J]. 浙江大学学报, 1992, 26(6): 621—626.
- [2] 周源泉, 刘文生, 田胜利. 双参数指数分布的可靠性评估(I)[J]. 质量与可靠性, 2004, (1): 5—10.
- [3] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京: 科学出版社, 1981. 90—106.
- [4] 印凡成, 范伟民, 陈明辉. 有替换定时指数串联系统可靠度的近似置信限[J]. 河海大学学报, 1993, 21(4): 88—94.
- [5] 印凡成. 具有位置参数、尺度参数部件的可靠度置信限[J]. 河海大学学报, 1992, 20(5): 31—36.

UMVUE of reliability for one-unit and series system on GAMMA distribution

SHI Chun-hua, YIN Fan-cheng

(College of Sciences, Hohai Univ., Nanjing 210098, China)

Abstract: The maximum likelihood estimate and uniformly minimal variance unbiased estimate (UMVUE) of MTTF were made on the one-unit system whose lifetime was assumed to be on GAMMA distribution. The BASU theorem was used to derive (UMVUE) of the reliability of one-unit and series system.

Key words: system reliability; maximal likelihood estimate; UMVUE