

桁架结构分析的拓扑变化法

姜冬菊 张子明

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 通过对基内力和广义约束矩阵的定义,提出了一套新的桁架结构内力分析方法.利用拓扑变化的方法和桁架结构的受力特性,在生成结构的同时也形成了进行结构分析所需要的全部信息,进而可以方便地完成各种工况下的结构计算.该方法无需建立联立方程组,而且简单易行,便于程序化.

关键词 拓扑变化 桁架结构 基内力 广义约束矩阵 柔度法

中图分类号 O342 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2005)04-0426-04

荣廷玉等^[1~4]将有限元的概念进一步引申,提出了基元等系列概念及弹性结构的拓扑变化定理,并由此进行结构的内力分析等,从而完全避免了有限元中耗时较多的求解方程的计算过程,尤其在有结构截面、形状和拓扑变动的计算中(如优化设计),更能显示出其优越性.本文采用了其中拓扑变化的思想,同时结合桁架受力特性和柔度法进行桁架结构的内力分析,也避免了方程的组建和求解过程,其概念更清晰,方法更简便.该方法的思路是,从最简单的不共线两杆结构开始,通过连续添加杆件形成所需的结构形式,同时也形成计算杆件内力的所需信息,即广义约束矩阵.计算过程中的每一步都是对已有计算信息的充分利用,并以矩阵形式表示,便于计算机程序化的实现和应用.

1 基内力和广义约束矩阵的定义

桁架结构在每个结点自由度方向作用单位荷载时,引起的各杆内力称为基内力.以 m 表示杆单元数、 n 表示结点数,则基内力可用矩阵表示为

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \overline{F^1_{1,1}} & \overline{F^2_{1,1}} & \cdots & \overline{F^1_{1,n}} & \overline{F^2_{1,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{F^1_{m,1}} & \overline{F^2_{m,1}} & \cdots & \overline{F^1_{m,n}} & \overline{F^2_{m,n}} \end{bmatrix}_{m \times 2n}$$

(1)

$\bar{F}$ 称为广义约束矩阵^[5].其中任一元素 $\overline{F^k_{\alpha,j}}$ 表示沿第 j 结点 k 方向作用单位荷载时所引起的第 α 杆元的内力. $\alpha = 1 \dots m$; $j = 1 \dots n$; $k = 1, 2$ 分别表示沿结点自由度方向,这里为水平和竖直两个方向.

形成结构的广义约束矩阵后,由其定义可知,利用简单的矩阵相乘便可方便地求出结构在各种工况下的内力大小.

2 广义约束矩阵的形成

广义约束矩阵的形成采用拓扑变化法.由基础开始,逐个增加杆件或结点,直至生成所需要的结构为止.在添加杆件或结点时,主要有如下两种方式.

- a. 肢元生成法.由基础或已有结构上的两结点伸出 α 和 β 两杆元,形成一个新结点,且三结点不共线,则 α 和 β 两杆元称为肢元,如图 1 所示.
- b. 系元生成法.在结构两个原有结点间增设的一新杆元 α 称为系元,如图 2 所示.

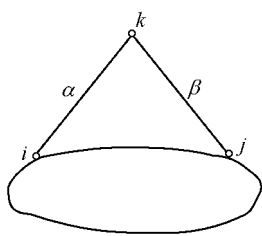


图 1 肢元示意图
Fig.1 Limb element

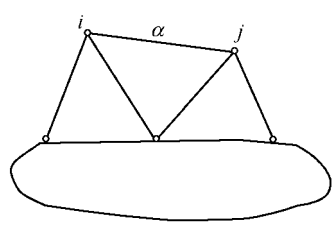


图 2 系元示意图
Fig.2 Tie element

这两种方式多次重复使用,可生成具有任意形式的桁架结构.在增加肢元和系元的过程中,也将生成各杆元的基内力.当全部杆件添加完毕时,各杆元的全部基内力也都已求得,即广义约束矩阵形成.

2.1 肢元生成法

每一对肢元生成时,将引起肢元自身的基内力,同时会对其他杆元的基内力产生影响.

2.1.1 肢元的基内力

由基内力的定义及桁架结构的受力特性可知,新生成肢元的基内力矩阵中除了在新生成的结点($i+1$)处有值外,其余各项均为零.即

$$\left. \begin{aligned} \overline{F_{\alpha,j}^k} &= 0 \\ \overline{F_{\alpha+1,j}^k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (j = 1 \dots i; k = 1, 2)$$

(2)

由图 3 和图 4 可知,肢元在结点($i+1$)处的基内力为

$$\overline{F_{\alpha,i+1}^1} = \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} \quad \overline{F_{\alpha,i+1}^2} = \frac{\cos \gamma}{\sin \theta}$$

(3)

$$\overline{F_{\alpha+1,i+1}^1} = \frac{-\sin(\gamma + \theta)}{\sin \theta} \quad \overline{F_{\alpha+1,i+1}^2} = \frac{-\cos(\gamma + \theta)}{\sin \theta}$$

(4)

式中: θ —— α 杆和 $\alpha+1$ 杆之间的夹角 $0^\circ < \theta < 180^\circ$; γ —— $\alpha+1$ 杆与水平坐标轴的夹角,以 $\alpha+1$ 杆逆时针转至水平轴为正.

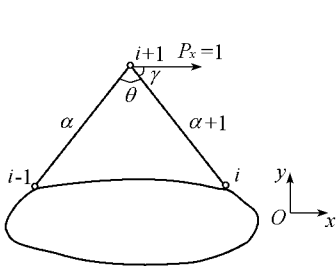


图 3 新生结点受单位水平荷载

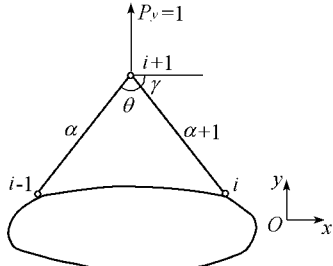


图 4 新生结点受单位竖向荷载

Fig.3 Unit horizontal loading at new node

Fig.4 Unit vertical loading at new node

2.1.2 新生肢元对原有杆元基内力的影响

当肢元生成时,对于已存在杆件的基内力除了在新增结点处有新增分量外,其余原有各项保持不变.而新增分量值可通过已存在的($\alpha-1$)个杆的基内力及新生成杆的基内力利用矩阵相乘求得,展开后每一元素表达为

$$\overline{F_{\beta,i+1}^k} = \overline{F_{\alpha,i+1}^k} [- \overline{F_{\beta,i-1}^1} \cos(\theta + \gamma) + \overline{F_{\beta,i-1}^2} \sin(\theta + \gamma)] + \overline{F_{\alpha+1,i+1}^k} (- \overline{F_{\beta,i}^1} \cos \gamma + \overline{F_{\beta,i}^2} \sin \gamma)$$

(5)

其中: $\beta = 1 \dots \alpha - 1$; $k = 1, 2$; θ 和 γ 如图 3、图 4 所示.

当肢元直接在基础上生成时,则已存在杆在新增结点处的基内力为零,且原有基内力保持不变;当肢元一个结点位于基础上的不动点,另一个结点位于结构上的可动点时,则式(5)中的 $\overline{F_{\beta,i-1}^1}$ 和 $\overline{F_{\beta,i-1}^2}$ 等于零.

2.2 系元生成法

2.2.1 系元的基内力

当增加系元 α 后,则新体系为原有体系的一次超静定结构.根据柔度法^[6]的思路,解除 α 杆约束,代以其内力 X_α .利用已求出的各杆元的基内力及柔度法方程,可分别求出在各单位荷载作用下的 X_α 值,具体可表示为 $X_{\alpha,j}^k$ ($k = 1, 2$; $j = 1, \dots, i$),即为 α 杆元的基内力.

当 X_α 为单位力(即 $\overline{X_\alpha} = 1$,如图 5 所示)时,在($\alpha-1$)个杆元内产生的内力阵

$$\mathbf{F'} = \overline{\mathbf{F}}_{(\alpha-1) \times 2i} \boldsymbol{\Psi}_{2i \times 1}$$

(6)

$$\boldsymbol{\Psi} = [0 \quad \dots \quad \cos \theta \quad \sin \theta \quad -\cos \theta \quad -\sin \theta]^T$$

记

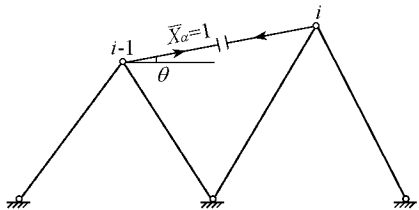


图 5 求解系元内力示意图

Fig.5 Solving internal force of tie element

$$\delta_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left(\frac{F'_{\beta}}{E_{\beta}A_{\beta}} \right)^2 l_{\beta} + \frac{l_{\alpha}}{E_{\alpha}A_{\alpha}} \quad \Delta^1_{\alpha P_j} = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left(\frac{F'_{\beta} \times \overline{F^1_{\beta j}}}{E_{\beta}A_{\beta}} \right) l_{\beta} \quad \Delta^2_{\alpha P_j} = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left(\frac{F'_{\beta} \times \overline{F^2_{\beta j}}}{E_{\beta}A_{\beta}} \right) l_{\beta} \quad (7)$$

则
$$X^1_{\alpha j} = -\frac{\Delta^1_{\alpha P_j}}{\delta_{\alpha\alpha}} \quad X^2_{\alpha j} = -\frac{\Delta^2_{\alpha P_j}}{\delta_{\alpha\alpha}} \quad (j = 1 \dots i) \quad (8)$$

$$\overline{F}_{\alpha} = [\overline{F^1_{\alpha 1}} \quad \overline{F^2_{\alpha 1}} \quad \dots \quad \overline{F^1_{\alpha i}} \quad \overline{F^2_{\alpha i}}] = [X^1_{\alpha 1} \quad X^2_{\alpha 1} \quad \dots \quad X^1_{\alpha i} \quad X^2_{\alpha i}] \quad (9)$$

2.2.2 新生系元对原有杆元基内力的影响

当系元增加后,可采用叠加方法对原有的 $(\alpha-1)$ 个杆的基内力进行修正,即

$$\overline{F}_{(\alpha-1) \times 2i} = \overline{F}_{(\alpha-1) \times 2i} + \overline{F}_{(\alpha-1) \times 2i} X \quad (10)$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ X^1_{\alpha 1} \cos \theta & X^2_{\alpha 1} \cos \theta & \dots & X^1_{\alpha i} \cos \theta & X^2_{\alpha i} \cos \theta \\ X^1_{\alpha 1} \sin \theta & X^2_{\alpha 1} \sin \theta & \dots & X^1_{\alpha i} \sin \theta & X^2_{\alpha i} \sin \theta \\ -X^1_{\alpha 1} \cos \theta & -X^2_{\alpha 1} \cos \theta & \dots & -X^1_{\alpha i} \cos \theta & -X^2_{\alpha i} \cos \theta \\ -X^1_{\alpha 1} \sin \theta & -X^2_{\alpha 1} \sin \theta & \dots & -X^1_{\alpha i} \sin \theta & -X^2_{\alpha i} \sin \theta \end{bmatrix}_{2i \times 2i}$$

3 广义约束矩阵的程序化

广义约束矩阵 $\overline{F}$ 的形成是一个动态过程.

a. 首先在基础上增加肢元. 利用式(3)(4)形成 $\overline{F}$ 为 2×2 阶矩阵.

b. 多次增加肢元或系元. 每增加一对肢元,就在矩阵 $\overline{F}$ 中增加两行两列,分别由式(2)~(4)形成各元素. 同时由式(5)修改矩阵中原有各项值. 每增加一个系元,则利用式(6)~(9)在 $\overline{F}$ 中增加一行元素,并利用式(10)对已有元素进行修正.

c. 当全部杆件增加完时, $\overline{F}$ 矩阵就形成了.

4 算 例

用本文提出的方法对图 6(a)桁架结构(EA 为常量)进行内力分析. 工况 1: $\alpha = 90^\circ$, $P_1 = 5 \text{ kN}$; $\beta = 0^\circ$, $P_2 = 15 \text{ kN}$. 工况 2: $\alpha = 120^\circ$, $P_1 = 10 \text{ kN}$; $\beta = 30^\circ$, $P_2 = 20 \text{ kN}$.

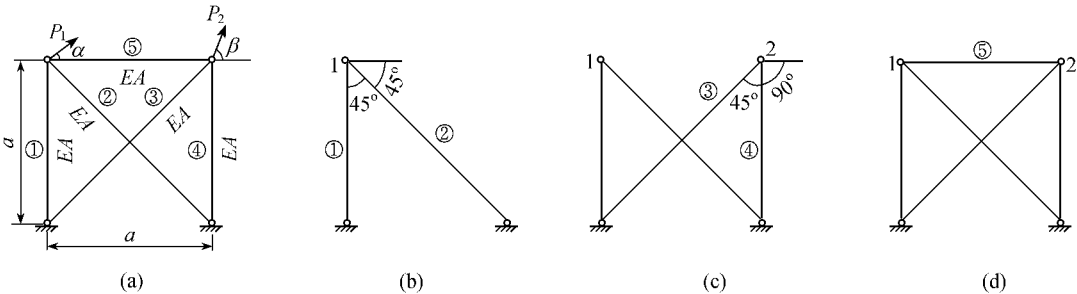


图 6 桁架结构拓扑生成示意图

Fig.6 Topological development of truss structures

结构的拓扑生成过程如图 6(b)(c)(d)所示,形成的广义约束矩阵为

$$\overline{F} = \begin{bmatrix} \overline{F^1_{1 1}} & \overline{F^2_{1 1}} & \overline{F^1_{1 2}} & \overline{F^2_{1 2}} \\ \overline{F^1_{2 1}} & \overline{F^2_{2 1}} & \overline{F^1_{2 2}} & \overline{F^2_{2 2}} \\ \overline{F^1_{3 1}} & \overline{F^2_{3 1}} & \overline{F^1_{3 2}} & \overline{F^2_{3 2}} \\ \overline{F^1_{4 1}} & \overline{F^2_{4 1}} & \overline{F^1_{4 2}} & \overline{F^2_{4 2}} \\ \overline{F^1_{5 1}} & \overline{F^2_{5 1}} & \overline{F^1_{5 2}} & \overline{F^2_{5 2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.558 & 0.884 & 0.442 & -0.116 \\ -0.789 & 0.163 & -0.625 & 0.163 \\ 0.625 & 0.163 & 0.789 & 0.163 \\ -0.442 & -0.116 & -0.558 & 0.884 \\ -0.442 & -0.116 & 0.442 & -0.116 \end{bmatrix}$$

利用 $F = \overline{F}P$ 求出的两种工况下的各杆内力为

$$\begin{aligned} F_1 &= [11.05 \quad -8.56 \quad 12.65 \quad -8.95 \quad 6.05]^T \text{ (kN)} \\ F_2 &= [11.36 \quad -3.83 \quad 13.58 \quad 0.38 \quad 7.70]^T \text{ (kN)} \end{aligned}$$

5 结 语

- a. 形成 $\bar{F}$ 后,利用 $F = \bar{F}P$ 可方便地实现各工况下桁架体系的内力计算.同时,利用虚功原理,经过简单的矩阵运算,也可方便地求出位移等其他量值.该方法的思路可直接推广应用于空间桁架结构.
- b. 本文采用的方法不涉及劲度矩阵的组建及代数方程组的求解过程,且概念清晰,方法简便,操作规范,便于程序化.
- c. 当考虑进行优化设计时,修改 $\bar{F}$ 即可实现结构变化后的重分析,从而避免了方程的不断重组和求解,可大大减少计算量.
- d. 由内力位移互等定理可知,本文所定义的广义约束矩阵就是文[1]中定义的基本位移矩阵,因此文[1]适用于基本位移矩阵的定理和公式也适用于本文的广义约束矩阵.

参考文献：

[1] 荣廷玉. 弹性结构拓扑变化的一般定理和拓扑变化法[J]. 固体力学学报,1985,1(1):29—42.
[2] RONG Ting-yu. Theory and method of structural variations of finite element system[J]. AIAA Journal,1994,32(9):1911—1919.
[3] 刘蓉华. 拱型结构分析的拓扑变化法[J]. 西安交通大学学报,1994,29(4):557—563.
[4] 刘亮,翟宇毅. 桁架结构重分析的一种新方法[J]. 计算力学学报,1998,15(2):149—153.
[5] 姜冬菊,张子明,王德信. 计算温度应力的广义约束矩阵法[J]. 河海大学学报(自然科学版),2003,31(1):29—32.
[6] 李廉锟. 结构力学[M]. 北京:高等教育出版社,1979. 131—137.

Topological variation for truss structure analysis

JIANG Dong-ju , ZHANG Zi-ming

(College of Civil Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :Based on the concept of basic internal force and generalized constraint matrix , a new method was proposed for calculation of the internal force of truss structures . By use of topological variation and responses of trusses , all the information needed for structure analysis was obtained at the same time of generation of the truss structure , and the structure calculation can be performed conveniently in different cases . Without requirement for establishment of simultaneous equations for solution , the method is simple in operation , and convenient in programming .

Key words :topological variation ; truss structure ; basic internal force ; generalized constraint matrix ; flexibility method