

均布荷载作用下两端固支梁的弹塑性分析

李会知¹ 杨建中¹ 刘敏珊²

(1. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 郑州大学工程力学系, 河南 郑州 450002)

摘要 通过单位荷载法分析了两端固支超静定梁在均布荷载作用下的弹塑性加载及变形过程, 并给出了加载各阶段的弯矩和位移计算公式. 分析结果表明, 受力变形过程可分为 4 个阶段: 弹性阶段; 固支端附近产生塑性变形阶段; 固支端为塑性铰而固支端附近塑性区卸载阶段; 固支端保持为塑性铰而梁中部部分区域产生塑性变形直至形成塑性流动阶段.

关键词 超静定梁; 单位荷载法; 弹塑性; 塑性铰; 均布荷载

中图分类号 TU323.3 **文献标识码** : A **文章编号** : 1000-198X(2005)04-0447-05

梁是工程结构中最常见的构件, 梁的受力和变形分析既是工程结构设计的基础, 也是力学的基础理论问题. 一些学者对静定梁的受力和变形全过程进行过分析. 如 Parathap 等^[1]分析了水平悬臂梁在自由端受竖向力作用的非线性弹性大挠度问题, Lo 等^[2]分析了水平悬臂梁在自由端受竖向力和简支梁受两个力作用的非线性弹性大挠度问题, 伍小强等^[3]分析了水平悬臂梁在自由端受竖向力作用的理想弹塑性大挠度问题. 但他们在进行超静定梁受力和变形全过程分析时, 大多采用了数值方法^[4], 而采用解析分析方法的比较少. 文献 5 利用曲率二次积分法研究了一端固支、一端铰支的单跨一次超静定梁中部受集中荷载作用的弹塑性加载全过程, 但该文在分段积分时产生过多的积分常数, 而且没有显式给出这些常数, 使得公式难以直接应用. 笔者^[6]利用虚功原理和单位荷载法研究了集中荷载作用下一次超静定梁在弹塑性加载过程中支反力与荷载的关系. 对于超静定梁的受力分析, 文献 7~10 只给出了弹性极限荷载和塑性极限荷载, 而并未分析超静定梁受力变形各阶段的特点及各阶段的荷载值. 对于两端固支的高次超静定梁的弹塑性分析, 尚未见报道. 本文利用基于虚功原理的单位荷载法对图 1 所示的两端固支超静定梁在均布荷载作用下的工况进行了弹塑性加载全过程的分析, 并得出了加载各阶段的弯矩、位移公式.

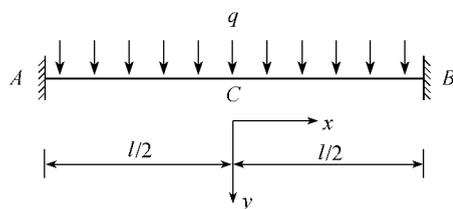


图 1 两端固支超静定梁
Fig. 1 A statically-indeterminate beam fixed at two ends

1 弹性阶段

弹性阶段是梁受力变形的第 1 阶段. 在本阶段, 梁上各处处于弹性变形状态, 其弯矩 $M = \frac{1}{2} qx^2 - \frac{1}{24} ql^2$,

竖向位移(挠度曲线) $\Delta = \frac{q}{24EI} \left(x^2 - \frac{1}{4} l^2 \right)^2$, 弯矩、竖向位移均与荷载 q 呈比例关系.

本阶段($q \leq q_e$)结束时, 两固支端处的弯矩同时达到弹性极限弯矩 M_e , 弹性极限荷载 $q_e = \frac{12M_e}{l^2}$.

塑性极限荷载 $q_u = \frac{16M_u}{l^2}$ (其中 M_u 为梁截面塑性极限弯矩).

上述弹性阶段的结果和塑性极限荷载已有结论, 仍在此列出是为了问题的完整性, 也便于与产生弹塑性变形后的工况进行比较.

对于理想弹塑性材料的矩形截面梁, $M_e = \frac{bh^2}{6}\sigma_s$, $M_u = \frac{bh^2}{4}\sigma_s$ (其中 b, h, σ_s 分别为梁宽、梁高、材料屈服应力), 因此 $\frac{q_u}{q_e} = \frac{4}{3} \frac{M_u}{M_e} = 2$. 当 $q_e < q < q_u$ 时, 梁部分区段外缘产生塑性变形 (称为弹塑性段), 部分区段仍保持弹性变形 (称为弹性段). 当梁产生塑性变形时, 梁的弯矩和竖向位移与荷载 q 的关系不再是比例关系. 下面重点分析 $q_e < q < q_u$ 时梁的弯矩和竖向位移随 q 的变化.

2 固支端附近出现塑性变形阶段

在本阶段, 梁固支端附近的部分区段 $(-\frac{l}{2} \leq x \leq -a$ 和 $a \leq x \leq \frac{l}{2})$ 处于弹塑性变形状态, 而其他区段仍处于弹性变形状态. 该阶段结束时, 两固支端处的弯矩达到塑性极限弯矩 M_u , 即此时两固支端同时成为塑性铰, 对应荷载记为 q_1 .

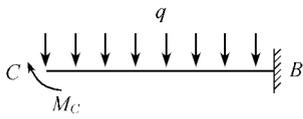


图2 基本体系
Fig.2 Basic system

为了简化计算, 利用结构的对称性, 采用图2所示的基本体系, 当弯矩 M_C 的数值使截面 C 的转角为零时, 该值就是图1跨中截面 C 的弯矩, 从而可以进一步求出梁的弯矩分布.

在本阶段, $q_e < q \leq q_1$, M_C 与 q 不再呈比例关系, 梁的弯矩分布发生了变化, 梁任一截面的弯矩为

$$M = \frac{1}{2}qx^2 - M_C \tag{1}$$

梁发生弹塑性变形时, 矩形截面理想弹塑性梁的曲率 K 和弯矩 M 的关系为^[8]

$$K = \begin{cases} \frac{M}{EI} & \text{弹性段} \\ \frac{K_e}{\sqrt{3 - \frac{2|M|}{M_e}}} \text{sgn}M & \text{弹塑性段} \end{cases} \tag{2}$$

在截面 C 加单位弯矩, 得到图3所示的基本体系单位荷载弯矩图. 图4为 $q_e < q \leq q_1$ 时的弯矩图. 可用单位荷载法由图3、图4弯矩求图2基本体系中截面 C 的转角 θ_C :

$$\begin{aligned} \theta_C = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M}K dx &= \int_0^a \frac{\frac{1}{2}qx^2 - M_C}{EI} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{K_e}{\sqrt{3 - \frac{qx^2 - M_C}{M_e}}} dx = \\ &= \frac{a}{EI} \left(\frac{1}{6}qa^2 - M_C \right) + K_e \sqrt{\frac{M_e}{q}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{ql}}{2\sqrt{3M_e + 2M_C}} - \right. \\ &\quad \left. \arcsin \frac{\sqrt{qa}}{\sqrt{3M_e + 2M_C}} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

由 $\frac{1}{2}qa^2 - M_C = M_e$ 得

$$a = \frac{\sqrt{2(M_e + M_C)}}{q} \tag{4}$$

将式(4)和 $K_e = \frac{M_e}{EI}$ 代入式(3)并令 $\theta_C = 0$ 得

$$(M_e - 2M_C)\sqrt{2(M_e + M_C)} + 3M_e \sqrt{M_e} \left(\arcsin \frac{\sqrt{ql}}{2\sqrt{3M_e + 2M_C}} - \arcsin \sqrt{\frac{2M_e + 2M_C}{3M_e + 2M_C}} \right) = 0 \tag{5}$$

式(5)表达了图1超静定梁在本阶段 ($q_e < q \leq q_1$) 的 M_C 与荷载 q 的关系. 由此可见, M_C 与 q 为复杂的非线性关系. 给定荷载 q 就可由式(5)求出 M_C , 也就能由式(1)求出梁的弯矩分布, 也可进一步求出梁上任一点的位移. 为了确定本阶段的荷载范围, 需确定 q_1 的数值.

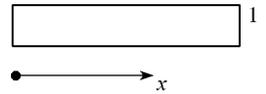


图3 截面 C 单位荷载弯矩图
Fig.3 Diagram of unit-load bending moment for section C

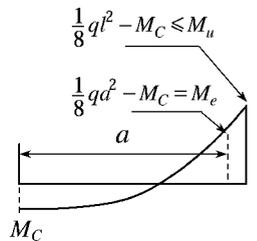


图4 弹塑性阶段弯矩图
Fig.4 Bending moment for elastic-plastic stage

当 $q = q_1$ 时, $\frac{1}{8} q_1 l^2 - M_C = M_u = 1.5 M_e$, 因此

$$q_1 = \frac{12M_e + 8M_C}{l^2} \quad (6)$$

联立式(4)(5)(6), 得本阶段结束时参数

$$q_1 = \frac{18.9608M_e}{l^2} \quad M_C = 0.8701M_e \quad a_1 = 0.1972l \quad (7)$$

下面确定本阶段任意截面的竖向位移. 设梁上任意截面 D 距截面 C 的距离为 x , 在截面 D 施加竖向单位荷载, 得到图5所示截面 D 的单位荷载弯矩图. 当 $0 \leq x < a$ 时, 截面 D 的竖向位移为

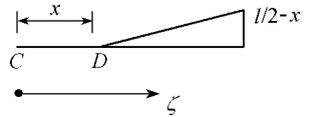


图5 截面 D 单位荷载弯矩图
Fig.5 Diagram of unit-load bending moment for section D

$$\begin{aligned} \Delta_D = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M} K d\zeta = \int_x^a \frac{K_e(\zeta - x) \left(\frac{1}{2} q \zeta^2 - M_C \right)}{EI} d\zeta + \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{K_e(\zeta - x)}{\sqrt{3 - \frac{q\zeta^2 - 2M_C}{M_e}}} d\zeta = \\ \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24} q x^4 - \frac{1}{2} M_C x^2 - \frac{1}{6} q a^3 x + M_C a x + \frac{1}{8} q a^4 - \frac{1}{2} M_C a^2 \right) - \\ K_e \sqrt{M_e} \left[\frac{1}{q} \left(\sqrt{3M_e + 2M_C - \frac{1}{4} q l^2} - \sqrt{M_e} \right) + \right. \\ \left. \frac{x}{\sqrt{q}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{q} l}{2\sqrt{3M_e + 2M_C}} - \arcsin \frac{\sqrt{q} a}{\sqrt{3M_e + 2M_C}} \right) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

式中 a, M_C 分别由式(4)(5)确定.

当 $a \leq x \leq l/2$ 时, 截面 D 的竖向位移为

$$\begin{aligned} \Delta_D = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M} K d\zeta = \int_x^{\frac{l}{2}} \frac{K_e(\zeta - x)}{\sqrt{3 - \frac{q\zeta^2 - 2M_C}{M_e}}} d\zeta = -K_e \sqrt{M_e} \left[\frac{1}{q} \left(\sqrt{3M_e + 2M_C - \frac{1}{4} q l^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \sqrt{3M_e + 2M_C - q x^2} \right) + \frac{x}{\sqrt{q}} \left(\arcsin \frac{\sqrt{q} l}{2\sqrt{3M_e + 2M_C}} - \arcsin \frac{\sqrt{q} x}{\sqrt{3M_e + 2M_C}} \right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

3 固支端为塑性铰到跨中某截面达弹性极限阶段

在本阶段, 固支端已成为塑性铰, $\frac{1}{8} q l^2 - M_C = M_u = 1.5 M_e$, 因此梁结构成为静定结构. M_C 与 q 虽是线性关系, 但不是比例关系. 给定荷载 q , 可由下式求出 M_C .

$$M_C = \frac{1}{8} q l^2 - 1.5 M_e \quad (10)$$

由式(1)得本阶段弯矩分布为

$$M = \frac{1}{2} q x^2 - \frac{1}{8} q l^2 + 1.5 M_e \quad (11)$$

在本阶段, 由于塑性铰引起内力重分布, 随着荷载的增加, 上一阶段的弹塑性变形区域发生卸载, 当 $a_1 \leq x \leq l/2$ 时, 曲率为

$$K = (K)_{q=q_1} - \frac{\Delta M}{EI} \quad (12)$$

式中 $\Delta M = (M)_{q=q_1} - M = \frac{1}{2} (q - q_1) \left(\frac{1}{4} l^2 - x^2 \right)$.

本阶段结束时, 截面 C 的弯矩 M_C 达到弹性极限弯矩 M_e , 此时对应荷载记为 q_2 . 由式(10)得

$$q_2 = \frac{20M_e}{l^2}$$

下面求本阶段 ($q_1 < q \leq q_2$) 任意截面 D 的竖向位移.

当 $0 \leq x < a_1$ 时,截面 D 的竖向位移为

$$\begin{aligned} \Delta_D = \int_0^{\frac{l}{2}} \overline{MK} d\zeta = \int_x^{a_1} \frac{(\zeta - x) \left(\frac{1}{2} q \zeta^2 - \frac{1}{8} q l^2 + 1.5 M_e \right)}{EI} d\zeta + \\ \int_{a_1}^{\frac{l}{2}} (\zeta - x) \left[\frac{K_e}{\sqrt{3 - \frac{q_1 \zeta^2 - 0.25 q_1 l^2 + 3 M_e}{M_e}}} - \frac{\frac{1}{2} (q - q_1) \left(\frac{1}{4} l^2 - x^2 \right)}{EI} \right] d\zeta = \\ \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{24} q x^4 - \left(\frac{1}{16} q l^2 - \frac{3}{4} M_e \right) x^2 + (0.04167 q l^2 - \right. \\ \left. 0.91301 M_e) l x - 0.007812 q l^4 + 0.2403 M_e l^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

当 $a_1 \leq x \leq l/2$ 时,截面 D 的竖向位移为

$$\begin{aligned} \Delta_D = \int_0^{\frac{l}{2}} \overline{MK} d\zeta = \int_x^{\frac{l}{2}} (\zeta - x) \left[\frac{K_e}{\sqrt{3 - \frac{q_1 \zeta^2 - 0.25 q_1 l^2 + 3 M_e}{M_e}}} - \frac{\frac{1}{2} (q - q_1) \left(\frac{1}{4} l^2 - x^2 \right)}{EI} \right] d\zeta = \\ \frac{1}{EI} \left\{ 0.2297 M_e l \left[\sqrt{\frac{1}{4} l^2 - x^2} - x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2x}{l} \right) \right] - \left(\frac{1}{2} q - 9.4804 \frac{M_e}{l^2} \right) \times \right. \\ \left. \left(\frac{1}{64} l^4 - \frac{1}{12} l^3 x + \frac{1}{8} l^2 x^2 - \frac{1}{12} x^4 \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

4 固支端为塑性铰、跨中部分出现塑性变形直至形成塑性流动机构阶段

在本阶段 ($q_2 \leq q \leq q_u$) ,固支端仍保持为塑性铰,结构是静定结构,弯矩分布 M, M_C 与 q 的关系仍分别由式(11)(10)表达.随着荷载的增加,在 $a_1 \leq x \leq l$ 内,第2阶段的弹塑性变形区域继续卸载,而截面 C 附近一段出现弹塑性变形.设其范围为 $0 \leq x \leq s$,令式(11)弯矩为 $-M_e$,得

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} l^2 - \frac{5 M_e}{q}} \quad (15)$$

本阶段结束时,截面 C 弯矩 M_C 达到塑性极限弯矩 M_u ,形成塑性铰,达塑性极限状态,结构成为塑性流动机构,丧失进一步的承载能力,此时对应荷载即为极限荷载 $q_u = \frac{24 M_e}{l^2}$.

与前同理,利用单位荷载法可求出本阶段任意截面 D 的竖向位移.当 $0 \leq x < s$ 时,截面 D 的竖向位移为

$$\begin{aligned} \Delta_D = K_e \sqrt{M_e} \left\{ \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\sqrt{x^2 + 6 \frac{M_e}{q} - \frac{1}{4} l^2} - \sqrt{\frac{M_e}{9}} \right) + \frac{x}{\sqrt{q}} \left[\ln \left(s + \sqrt{\frac{M_e}{q}} \right) - \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{M_e}{q} + x^2 - \frac{1}{4} l^2} \right) \right] \right\} + \\ \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{8} q (a_1^4 - s^4) - \frac{1}{6} q x (a_1^3 - s^3) + \left(\frac{3}{4} M_e - \frac{1}{16} q l^2 \right) (a_1^2 - s^2) + \left(\frac{1}{8} q l^2 - \frac{3}{2} M_e \right) (a_1 - s) x \right] + \\ K_e l (0.2112 l - 0.6145 x) - \frac{q l^3}{EI} (0.005571 l - 0.01829 x) \end{aligned} \quad (16)$$

当 $s \leq x < a_1$ 时,截面 D 的竖向位移式与公式(13)相同;当 $a_1 \leq x \leq l/2$ 时,截面 D 的竖向位移公式与式(14)相同.公式虽然相同,但 x 和 q 的取值范围不同.

5 结束语

本文研究了均布荷载作用下两端固支超静理想弹塑性矩形截面梁的全部受力变形过程.分析时将受力变形分为4个阶段.第1阶段为弹性阶段.弹性阶段,弯矩随荷载 q 的增加按比例增加,零弯矩截面位置不变,而后3个阶段零弯矩截面位置随荷载 q 的增加不断地发生变化,弯矩随荷载 q 的增加也不再按比例增加.第2阶段在两固定端附近区段对称地产生了弹塑性变形.进入第3阶段后两固支端形成塑性铰,上一阶

段的弹塑性区发生卸载. 在第 4 阶段, 固支端保持为塑性铰, 第 2 阶段的弹塑性区继续卸载, 而在中部区段产生弹塑性变形, 直至在梁中点产生第 3 个塑性铰而成为塑性流动机构. 各阶段的荷载终值分别为 $q_e = \frac{12M_e}{l^2}$, $q_1 = \frac{18.9608M_e}{l^2}$, $q_2 = \frac{20M_e}{l^2}$, $q_u = \frac{24M_e}{l^2}$. 本文还给出了各阶段弯矩和位移的计算公式.

参考文献:

- [1] PARATHAP J, VARADAN T K. The inelastic large deformation of beams[J]. J Appl Mech Trans ASME, 1976, 43: 689—699.
- [2] LO C C, GUPTA S D. Bending of a non-linear rectangular beam in large deflection[J]. J Appl Mech Trans ASME, 1978, 45: 213—225.
- [3] 伍小强, 余同希. 悬臂梁弹塑性大挠度全过程的分析[J]. 力学学报, 1986, 18(6): 517—527.
- [4] 干洪. 梁的弹塑性大挠度数值分析[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(6): 633—639.
- [5] 曹天捷, 杜蓬娟. 一次超静理想弹塑性梁的全过程分析[J]. 工程力学, 1999, 16(3): 105—112.
- [6] 李会知. 超静定梁的弹塑性分析[J]. 力学与实践, 2004, 26(4): 80—82.
- [7] 包世华. 结构力学[M]. 武汉: 武汉工业大学出版社, 2001. 244—264.
- [8] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992. 38—59.
- [9] 夏志皋. 塑性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 2002. 110—118.
- [10] AKHTAR S K, SUJIAN H. Continuum theory of plasticity[M]. New York: Wiley, 1995. 355—386.

Elastic-plastic analysis of beams fixed at two ends subjected to uniformly-distributed loads

LI Hui-zhi¹, YANG Jian-zhong¹, LIU Min-shan²

(1. College of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China ;

2. Department of Engineering Mechanics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract :The elastic-plastic loading and deformation process of the statically-indeterminate beam fixed at two ends under uniformly-distributed loads was analyzed by use of the unit-load method, and formulas for bending moment and displacement at different loading stages were derived. The result of analysis shows that the deformation process can be divided into four stages, including the stage of elastic deformation of the whole beam, the stage of plastic deformation occurring in the region close to two fixed ends, the stage of unloading in plastic regions with two plastic hinges at the fixed ends, and the stage of plastic deformation till the occurrence of plastic yield at the middle of the beam with two plastic hinges at the fixed ends.

Key words :statically-indeterminate beam ; unit-load method ; elasto-plasticity ; plastic hinge ; uniformly-distributed load