

波浪 Boussinesq 方程与缓坡方程的比较

张 扬,李瑞杰,张素香

(河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098)

摘要 分析、比较了近岸浅水波浪传播变形的 Boussinesq 方程和缓坡方程的形式与特点,建立了包含底摩擦能耗效应、波浪破碎效应和子网格效应的 Boussinesq 方程波浪数学模型,并介绍了处理动边界问题的窄缝法以及处理消波边界的海绵层技术.采用经验非线性色散关系,结合含非线性项的缓坡方程,得到考虑非线性作用影响的缓坡方程模型.用物理试验结果对两种模型进行验证,并用相关性分析方法对两模型的计算精度进行了分析与说明.

关键词 Boussinesq 方程 缓坡方程 波浪变形 相关性分析

中图分类号 P731.2

文献标识码 A

文章编号 1000-1980(2005)05-0588-04

缓坡方程和 Boussinesq 方程的研究对象均为浅水缓变地形下的波浪变形. Boussinesq 方程直接描述波浪波动过程中水质点的运动规律.缓坡方程基于海浪要素在海浪周期和波长的时空尺度上缓变的事实,描述海浪波动能量、波高、波长、频率等要素的变化,着眼于海浪宏观上的整体特征,不涉及具体的水质点的运动过程.缓坡方程和 Boussinesq 方程是在不同理论前提下导出的,两者在性质上存在明显的差异,因此,对不同性质物理过程的描述有不同程度的侧重.本文对 Boussinesq 方程和缓坡方程从基本方程及其特点进行了比较,用 Berkhoff 试验结果对两种波浪数学模型的计算结果进行了验证和分析.

1 Boussinesq 方程

Peregrine^[1] 导出了变水深条件下的二维 Boussinesq 方程,称为经典 Boussinesq 方程,它描述了波浪在浅水域里传播的弱非线性和弱色散性.方程涉及两个重要的参数: $\mu = h/L = kh$ 和 $\epsilon = a/h$, 其中 a, h, L 和 k 分别为波浪的特征波幅、特征水深、特征波长和特征波数, ϵ 用于衡量水波运动的非线性程度, μ 用于衡量水波的色散程度.方程的弱非线性和弱色散性,成了经典 Boussinesq 方程最为严重的制约,直接限制了方程的使用范围和数值计算的精度.为有效解决这一问题,国内外许多学者做了大量有意义的工作来改进方程的色散性和非线性效应,其中 Nwogu^[2] 以某一水层的流速和波面为变量,通过对具体水层的确定,使方程的水深使用范围为经典方程的 2~3 倍.在考虑底摩擦效应、波浪破碎效应和子网格效应及处理造波、消波边界、动边界以及数值过滤等问题后, Nwogu 给出的 Boussinesq 方程可以拓展成如下形式:

$$z_t + \frac{1}{b} [(Au)_x + (Av)_y] + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla u_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla (hu_\alpha)] \right\} + f(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

$$u_{at} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + v_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + gz_x + \frac{z_\alpha^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_{at}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{at}}{\partial x \partial y} \right) + z_\alpha \left(\frac{\partial^2 (hu_{at})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (hv_{at})}{\partial x \partial y} \right) + F_b + F_{br} + F_{bs} + F_{sp} = 0 \quad (2)$$

$$v_{at} + u_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial y} + gz_y + \frac{z_\alpha^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_{at}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_{at}}{\partial y^2} \right) + z_\alpha \left(\frac{\partial^2 (hu_{at})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (hv_{at})}{\partial y^2} \right) + G_b + G_{br} + G_{bs} + G_{sp} = 0 \quad (3)$$

式中: $f(x, y, t)$ ——造波源函数; u_α ——对应于 z_α 的水平速度矢量; z_α ——水深层, $\alpha = -0.39, z_\alpha = -0.531h$; b, A ——采用‘窄缝法’处理动边界问题的窄缝的单位宽度和窄缝处的横断面面积; $F_b, G_b, F_{br}, G_{br}, F_{bs}, G_{bs}$ ——底摩擦项; F_{sp}, G_{sp} ——考虑波浪破碎的能量耗散项.

Boussinesq 方程为质量守恒方程和不可压无黏流体的动量方程,动量方程中的 3 阶混合空间、时间导数项称为 Boussinesq 项,是短波区别于长波的主要标志. Boussinesq 方程有以下特点:(a)为非线性方程,能够反映波浪的非线性效应;(b)将三维波动问题简化为二维问题,使问题得以简化;(c)以流速和水位描述水体变化,可以反映波浪运动的各种变形,如折射、绕射、反射以及变浅等;(d)为时变型方程,可以研究波浪传播过程中的动态演变;(e)考虑了底部摩擦、波浪破碎和亚格湍流混合等因素的影响,可以模拟波浪破碎过程;(f)方程中加入了用来造波的源函数,可以解决规则波、不规则波造波问题,同时还包含了对消波边界进行处理的事项.

2 缓坡方程

在缓坡方程的简化和近似形式中,抛物型方程和双曲型方程最为常用.其中 Kirby^[3]利用 Pade'展开和最小误差原理,给出了一适用于较大入射波方向的抛物型缓坡方程模型,传播主方向为 x 方向的控制方程为

$$C_g A_x + \frac{1}{2} (C_g)_x A + i(k - a_0 k) C_g A + \frac{i}{\omega} \left(a_1 - b_1 \frac{\bar{k}}{k} \right) (CC_g A_y)_y - \frac{b_1}{\omega k} (CC_g A_y)_{yx} + \frac{b_1}{\omega} \left[\frac{k_x}{k^2} + \frac{(C_g)_x}{2kC_g} \right] (CC_g A_y)_y + \frac{i\omega F}{2} A + \frac{f_r}{2} A = 0 \tag{4}$$
$$f_r = \frac{2\omega f |A|}{3\pi \sinh(2kh) \sinh(kh)}$$

式中: $A(x,y)$ ——复振幅; a_0, a_1, b_1 ——反映波浪入射角度的常系数; $\bar{k}$ —— $k(x,y)$ 沿 y 方向的平均值; f ——摩擦系数,取 $f=0.01$; C ——波浪相速度; C_g ——波浪群速度; k ——波数.

非线性项 F 的表达式为^[5]

$$F = \frac{(1 + pe^2) \tanh(kh + qe)}{\tanh(kh)} - 1 \tag{5}$$
$$p = \tanh^2(kh) \quad q = \frac{kh}{\sinh(kh)} \quad e = k|A|$$

非线性色散关系采用^[5]:

$$\omega^2 = gk(1 + pe^2) \tanh(kh + qe) \tag{6}$$

缓坡方程本身属于线性波动理论,通过引入经验非线性色散关系来考虑波浪的非线性效应.缓坡方程有以下特点:(a)综合了波浪的折射和绕射,结合固边界的反射边界条件,即可构成波浪传播变形的联合折射绕射反射数学模型;(b)方程在频域上求解,计算相对简化,但不能模拟波浪的动态演变过程,具有很宽的波浪频率和水深使用范围.

3 两种模型数值计算结果的对比

用 Berkhoff 等^[4]地形验证缓坡方程不同计算方法的可信度.计算时离岸边界条件取深水 0.45 m 处的值,入射波波高为 0.023 2 m,波浪周期 T 为 1.0 s,方向为由 $x=0$ m 处沿 x 向入射,整个计算区域为 30 m $\times$ 30 m. Boussinesq 方程模型采用高精度的预测-校正格式,对式(1)~(3)进行离散求解. x 和 y 方向的步长分别取为 0.05 m 和 0.1 m,时间步长取 0.01 s,计算总时间为 40 s.初始条件为静水条件,在入射边界和岸边界处分别设置 2 m 和 3 m 的阻尼层消波,侧边界条件用直立墙边界给出.缓坡方程模型采用 Crank-Nicolson 差分格式对式(4)进行离散求解,计算空间步长为 0.25 m.

图 1 为 Boussinesq 方程模型与缓坡方程模型计算所得的相对波高与实测数据之间的对比图.从图 1 可以看出,无论是缓坡方程模型还是 Boussinesq 方程模型都能很好地模拟波浪在传播过程中发生的折射和绕射效应,两者都与实测数据相当一致.用相关分析方法可进一步比较模型的计算精度.

表 1 为分别采用 Boussinesq 方程模型和缓坡方程模型计算得到的各断面的相对波高与实测值相关性的比较.由表 1 可以看出,Boussinesq 方程模型的计算结果与实测值的相关性在 3,4 断面要略优于缓坡方程模型.而在其他 6 个断面,缓坡方程模型的计算结果较 Boussinesq 方程模型与实测数据更为相关.总观 8 个断面,Boussinesq 方程模型计算结果与实测值的平均相关系数为 0.940,缓坡方程模型为 0.965.可以看出,两种模型都达到了很高的计算精度,缓坡方程模型的计算结果整体上要略优于 Boussinesq 方程模型,说明经验非线性色散

关系的应用使得缓坡方程在具有非线性的同时提高了其模拟精度.

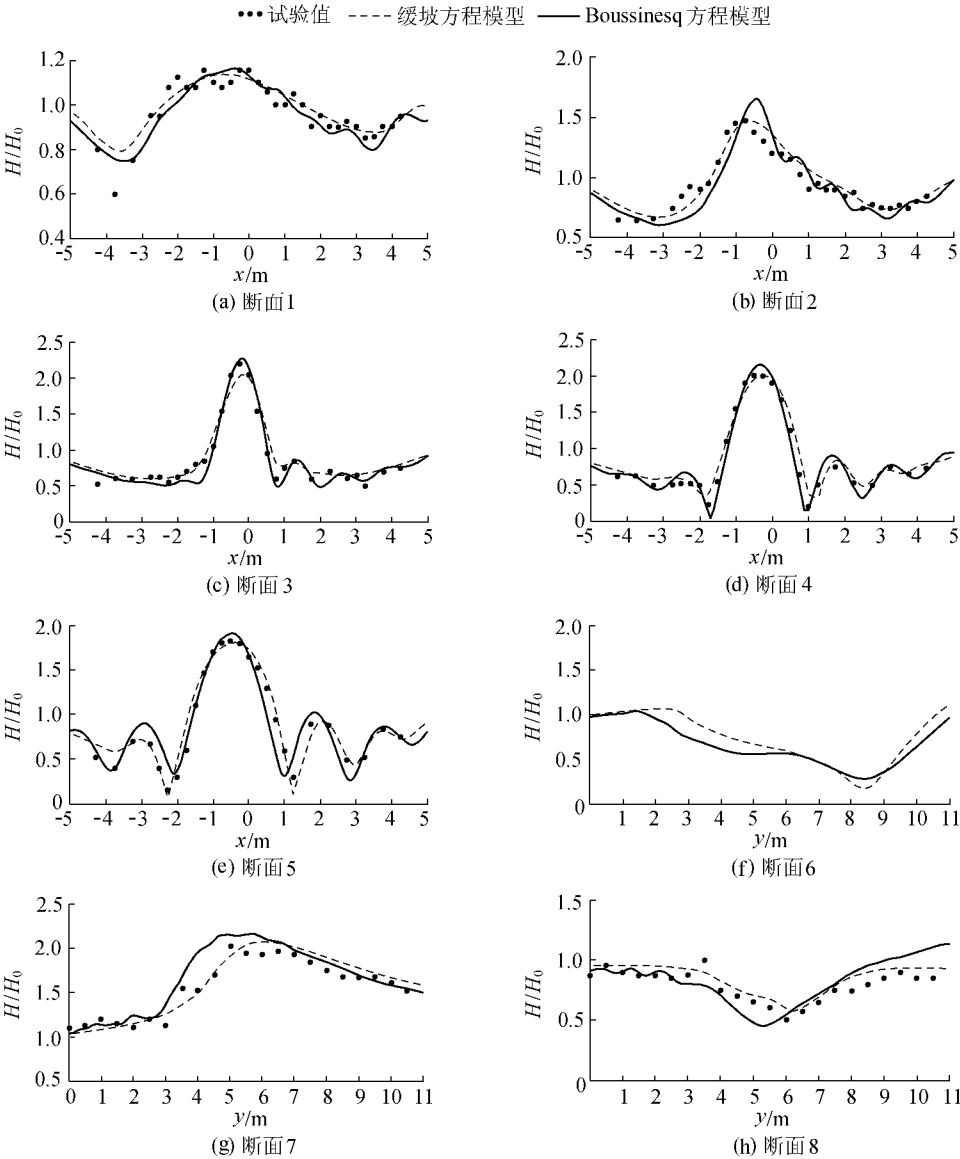


图 1 各断面相对波高对比

Fig.1 Comparison of relative wave height for each trasection

表 1 两种模型计算结果与实测数据相关性的比较

Table 1 Comparison of calculated results by two models with measured data

断面	实测值		Boussinesq 方程模型				缓坡方程模型			
	数学期望	均方差	数学期望	均方差	协方差	相关系数	数学期望	均方差	协方差	相关系数
1	0.977	0.126	0.970	0.124	0.014	0.907	0.993	0.101	0.012	0.931
2	0.956	0.238	0.933	0.292	0.063	0.906	0.975	0.253	0.057	0.956
3	0.911	0.492	0.884	0.532	0.258	0.983	0.954	0.464	0.223	0.976
4	0.892	0.563	0.881	0.588	0.327	0.987	0.941	0.549	0.304	0.984
5	0.930	0.523	0.944	0.504	0.251	0.952	0.969	0.527	0.270	0.981
6	0.700	0.294	0.656	0.234	0.066	0.963	0.726	0.276	0.079	0.975
7	1.560	0.318	1.656	0.378	0.113	0.941	1.594	0.366	0.113	0.970
8	0.773	0.144	0.752	0.171	0.021	0.878	0.824	0.133	0.018	0.950

4 结 语

Boussinesq 方程多为时域方程,可以研究波浪传播过程中的动态演变,较好地体现波浪传播过程的非线性

特点.在波浪之间各种非线性作用明显的情况下,Boussinesq 模型比较可靠,适用于海底坡度较缓的地形,计算浅水波的效果较好,在处理反射波问题时,可以模拟各种波形,但是只适用于较浅水深,其适用范围为近岸 1 ~ 2 km 范围之内.缓坡方程具有很宽的波浪频率和水深适用范围,综合了波浪的折射和绕射,解决了传统折射模型一些缺陷.波浪的非线性、波流的相互作用、风摄入波动能量、底摩擦能量损耗以及波浪破碎等物理过程都在改进的缓坡方程中得到不同程度的考虑,其适用范围为几到几十公里.

参考文献：

[1] PEREGRINE P H. Long waves on a beach[J]. J Fluid Mech, 1967,27 :815—827.
[2] NWOGU O. An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation[J]. J Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 1993,119(6) :618—638.
[3] KIRBY J T, DALRYMPLE R A. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models[J]. Coastal Eng, 1986,9 :545—561.
[4] BERKHOFF, BOOY, J C W. RADDER N. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves[J]. Coastal Eng, 1982,6 :255—279.
[5] LI Rui-jie, YAN Yi-xin, CAO Hong-sheng. Nonlinear dispersion relation in wave transformation[J]. China Ocean Engineering, 2003,17 : 117—122.

Comparisons of Boussinesq equation with mild-slope equation

ZHANG Yang, LI Rui-jie, ZHANG Su-xiang

(State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering ,
Hohai University , Nanjing 210098, China)

Abstract :The forms and characteristics of the Boussinesq equation and the mild-slope equation for study of wave transformation in near-shore shallow water were compared. The Boussinesq wave mathematical model, reflecting the energy consumption effect of bottom friction, the effect of wave breaking, and the effect of subgrid turbulent mixing, was established, and the slot technique to deal with moving boundary and the sponge layer to deal with absorbing boundary were introduced. In combination with the mild-slope equation with nonlinear term, a mild-slope equation model with nonlinear effect taken into account was obtained based on empirical nonlinear dispersion relation. The two models were verified with physical experiments, and their precision was analyzed with the correlation analysis method.

Key words Boussinesq equation ; mild-slope equation ; wave transformation ; correlation analysis