

调压室涌波最高水位随机分析的显式计算方法

朱永忠¹ 房玉亭² 索丽生³

(1. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098; 2. 华东宜兴抽水蓄能有限公司, 江苏 宜兴 214205;
3. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 针对典型调压室水力系统, 建立了具有随机初始条件的涌波分析随机模型, 并根据调压室水位波动特点, 去掉了随机模型中的绝对值, 利用泰勒级数展开式推导了水轮机瞬时全部甩荷时调压室中水位第 1 次向上波动时的水位随时间的随机解过程, 并由此给出了解过程的密度函数公式和涌波均值的最大值的显式计算公式。

关键词 调压室 涌波 随机分析 显式计算

中图分类号 TV732.5 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2005)06-0650-04

对于调压室在甩荷时的最高涌波水位的计算, 传统的方法是将各种影响因素及控制变量当作确定量, 综合选择不利条件组合, 求出最高涌波水位。但按传统方法设计的调压室(井)普遍存在容积或高度偏大的现象^[1,2]。实际上, 影响涌波大小的各种因素如库水位、带荷程度、丢荷程度、引水道摩阻等都具有随机性, 调压室涌波应是一个随机过程, 因此采用随机方法对其进行研究则更为合理。文献[3]采用 Monte-Carlo 方法对调压室涌波进行了随机模拟分析。但是, 随机模拟方法只能对系统进行模拟, 很难给出相应的显式计算公式。为此, 本文根据调压室中的水位波动特点, 用泰勒级数展开式推导了水轮机瞬时全部甩荷时调压室中水位第 1 次向上波动时的水位随时间的随机解过程, 并由此给出了解过程的密度函数和涌波均值的最大值的显式计算公式。

1 调压室基本方程

对于图 1 所示调压室系统, 忽略其下游高压管道的影响, 认为流量从 Q_0 到 Q_1 突然发生且直接发生在调压室的下游, 则可以建立运动方程及水流连续方程^[4]

$$Z = h_w + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$Q_1 = Vf + F \frac{dZ}{dt} \quad (2)$$

初始条件

$$V(0) = \frac{Q_0}{f} \quad (3)$$

$$Z(0) = \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V^2(0) \quad (4)$$

式中: $V(t)$ ——引水道流速(以水库向调压室方向为正); $Z(t)$ ——调压室瞬时相对水位(以库水位为基准, 向下为正); Q_0 ——机组负荷变化前的引用流量; Q_1 ——机组负荷变化后的引用流量; h_w ——进口水口至调压室水面的总水头损失, 此处仅考虑引水道沿程水头损失, $h_w = \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V|V|$; n ——引水道糙率; L ——引水道长度; R ——引水道水力半径; f ——引水道断面面积; F ——调压室断面面积; Z_R ——库水位; g ——重力加速

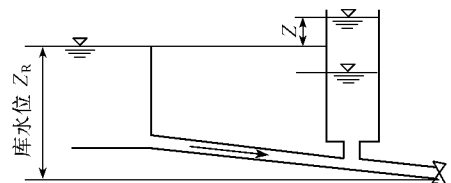


图 1 典型调压室系统
Fig.1 Typical surge tank system

度.

设 Q_f 为机组满负荷时的引用流量, Q_0, Q_1 分别为机组负荷变化前后的引用流量, m_0, m_1 分别为机组负荷变化前后的带荷程度系数, 则有 $Q_0 = m_0 Q_f, Q_1 = m_1 Q_f$. 于是调压室基本方程可写为

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} \left(Z - \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V |V| \right) \tag{5}$$

$$\frac{dZ}{dt} = - \frac{f}{F} V + \frac{m_1 Q_f}{F} \tag{6}$$

初始条件同前.

2 随机模型

对于给定的水电站水力单元而言, L, R, f, F, g 和 Q_f 为确定量, 引水道糙率 n 的取值变幅很小, 为方便问题的研究, 忽略糙率的随机性, 亦将它取为确定量. 机组负荷变化前的带荷程度系数 m_0 具有一定的随机性, 作为随机变量处理, m_0 采用 $[0, 1]$ 上的均匀分布^[5]. 下面考虑全甩负荷的情形, 所以机组负荷变化后的带荷程度系数为确定量, 即 $m_1 = 0$.

在上述条件下, 调压室基本方程变为

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} \left(Z - \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V |V| \right) \tag{7}$$

$$\frac{dZ}{dt} = - \frac{f}{F} V \tag{8}$$

初始条件

$$V(0) = \frac{m_0 Q_f}{f} \tag{9}$$

$$Z(0) = \frac{n^2 L m_0^2 Q_f^2}{R^{4/3} f} \tag{10}$$

式中 $V(t), Z(t)$ 为随机过程. 于是式 (7)~(10) 变为具有随机初始条件的随机微分方程组.

3 模型求解

对于具有随机初始条件的随机微分方程, 其解过程只需在其对应的确定性微分方程的解中将初始条件换成随机初始条件即可^[6]. 由于需要求解的只是调压室最高涌波水位, 故只要讨论调压室中水位第 1 次向上波动时水位与时间的变化过程即可. 利用文献 [7] 的方法可做如下推导.

式 (8) 对 t 求导并代入式 (7), 化简后有

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{fg}{FL} Z + \frac{gn^2 F}{R^{4/3} f} \frac{dZ}{dt} \left| \frac{dZ}{dt} \right| = 0 \tag{11}$$

对于向上波动, $\frac{dZ}{dt} < 0$, 式 (11) 可变为

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} - \frac{gn^2 F}{R^{4/3} f} \left(\frac{dZ}{dt} \right)^2 = - \frac{fg}{FL} Z \tag{12}$$

令 $W = \frac{dZ}{dt}, a = \frac{2fg}{FL}, b = \frac{2gn^2 F}{R^{4/3} f}$, 解方程 (12) 并代入初始条件, 得

$$W^2 = e^{bZ} \left[\frac{a}{b^2} e^{-bZ} (1 + bZ) - \frac{a}{b^2} e^{-bZ(0)} \right]$$

因为 $\frac{dZ}{dt} < 0$, 将上式开方, 得

$$\frac{dZ}{dt} = - \frac{\sqrt{a}}{b} \sqrt{1 + bZ - e^{-bZ(0)} e^{bZ}} \tag{13}$$

令 $k = e^{-bZ(0)}, X = bZ$, 式 (13) 变为

$$\frac{dX}{dt} = - \sqrt{a} \sqrt{1 + X - k e^X} \tag{14}$$

式(14)根号中有 e^X , 无法积分, 现将其展开成二阶泰勒级数并代入式(14), 有

$$\frac{dX}{dt} = -\sqrt{\frac{ak}{2}} \sqrt{\frac{2}{k}(1-k)(1+X)} - X^2 \tag{15}$$

解方程(15)并利用初始条件, 同时将 $X = bZ$ 代入其解, 得

$$\arcsin \frac{k + kbZ - 1}{\sqrt{1 - k^2}} = -\sqrt{\frac{ak}{2}} t + \arcsin \frac{k + kbZ(0) - 1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

求解上式并将弧度 $\sqrt{\frac{ak}{2}} t$ 换成角度 $\frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{\frac{ak}{2}} t$, 有

$$Z(t) = \frac{1}{kb} \left\{ 1 - k + \sqrt{1 - k^2} \sin \left[\arcsin \frac{k + kbZ(0) - 1}{\sqrt{1 - k^2}} - \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{\frac{ak}{2}} t \right] \right\} \tag{16}$$

记

$$Z(t) = H(m_0, t) \tag{17}$$

式(16)或(17)即为水轮机瞬时全部甩荷时调压室中水位第 1 次向上波动时的水位随时间的随机过程, 其密度函数由 m_0 的密度函数决定. 如果给出 m_0 的密度函数, 由随机变量的密度变换公式就可以求出 $Z(t)$ 的概率密度函数. 设 m_0 的密度函数为 $f(x)$, $Z(t)$ 的密度函数为 $g(x, t)$, $y = H(x, t)$ 的反函数为 $x = H^{-1}(y, t)$, 于是有

$$g(x, t) = f(H^{-1}(x, t)) \left| \frac{dH^{-1}(x, t)}{dx} \right|$$

从而可求出 $Z(t)$ 的密度函数. 有了 $Z(t)$ 的密度函数就可以求出 $Z(t)$ 的各种概率信息了.

特别地, 由式(17)有

$$E[Z(t)] = \int_G H(x, t) f(x) dx$$

式中 G 为 x 的取值范围. 此即为水轮机瞬时全部甩荷时调压室中水位第 1 次向上波动时的水位随时间的平均函数. 进一步可求出 $E[Z(t)]$ 关于时间 t 的第 1 个极大值, 即调压室涌波的最高均值涌波水位 Z_{1G} .

4 算 例

某水电站调压室直径为 20 m, $F = 314.16 \text{ m}^2$, 引水隧洞长 $L = 2500 \text{ m}$, 直径 $D = 10.5 \text{ m}$, $f = 86.59 \text{ m}^2$. 电站有 3 台机组, 总引用流量 $Q_f = 495 \text{ m}^3/\text{s}$, 正常库水位 707 m, 最高运行水位 710 m, 计算调压室最高涌波水位 Z_{1G} .

a. 确定性模型求解. 假设水轮机导叶瞬时全关, 引水道糙率 n 取可能的最小值 $n = 0.012$, 利用调压室涌波计算的解析式^[4]可解得最高涌波为 45.71 m. 因此, 调压室最高水位 $Z_{1G} = 710 \text{ m} + 45.71 \text{ m} = 755.71 \text{ m}$. 采用龙格-库塔数值积分, 求得最高涌波水位为 755.69 m.

b. 随机模型求解. 将上面的数据代入式(16), 有

$$Z(t) = 353.3589 e^{0.0092m_0^2} [1 - e^{-0.0092m_0^2} + \sqrt{1 - e^{-0.0184m_0^2}} \sin(\varphi)]$$

式中 $\varphi = \arcsin \frac{e^{-0.0092m_0^2} + 0.0092m_0^2 e^{-0.0092m_0^2} - 1}{\sqrt{1 - e^{-0.0184m_0^2}}} - 1.8842 t e^{-0.0046m_0^2}$. m_0 采用 $[0, 1]$ 上的均匀分布. 经计算, 得最高均值涌波水位为 733.9 m. 文献[3]用 Monte-Carlo 模拟法求得最高涌波水位为 734.65 m. 两者相对误差为 0.1%.

5 结 语

a. 由算例可以看出, 本文结果与文献[3]结果非常接近. 这说明本文计算方法具有很高的精度. 为便于操作, 本文还给出了具体的解析解过程.

b. 水轮机瞬时全部甩荷时调压室最高涌波水位问题是一个非常复杂的随机分析问题, 本文将 m_0 看作随机变量, 将其余量看作确定量. 这种处理方法还远远达不到实际问题的分析要求. 因此, 必须研究出比较好的针对于调压室最高涌波水位随机分析问题的随机分析方法.

参考文献：

[1] 丁浩. 水电站有压引水系统非恒定流 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1984. 93—150.
[2] 张芹芬, 索丽生. 水电站水击与调压室涌浪随机分析研究进展 [J]. 水利水电科技进展, 1998, 18(3): 7—11.
[3] 张芹芬, 索丽生. 调压室涌波分析的随机模型 [J]. 河海大学学报, 1997, 25(5): 41—45.
[4] 王世泽. 水电站建筑物 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1987. 107—108.
[5] 张芹芬. 水电站水击与调压室涌浪的随机分析 [D]. 南京: 河海大学, 1998.
[6] 张炳根, 赵玉芝. 科学与工程中的随机微分方程 [M]. 北京: 海洋出版社, 1980. 186—196.
[7] 张志昌, 刘松舰, 刘亚菲. 阻抗式和简单式调压室甩荷时水位波动的显式计算方法 [J]. 应用力学学报, 2004, 21(1): 50—55.

Method of explicit calculation for stochastic analysis of
the highest water level in surge tank

ZHU Yong-zhong¹, FANG Yu-ting², SUO Li-sheng³

(1. College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. East China Yixing Pumped Storage Power Co. Ltd, Yixing 214205, China;

3. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A stochastic model with stochastically initial conditions for surge calculation was developed for a typical hydraulic system of a surge tank. According to the characteristics of surges, the absolute symbol was removed from the stochastic model. The random process for the first upward fluctuation of water level in the surge tank at all load rejection was derived by means of Taylor series expansion, and the density function of the solution and the explicit formula for the maximum of mean surges were given.

Key words: surge tank; surge; stochastic analysis; explicit computation

欢迎订阅《水利水电科技进展》

全国中文核心期刊 中国科技核心期刊

全国水利系统优秀期刊 华东地区优秀期刊 江苏省优秀期刊

(邮发代号: 28-244, CN32-1439/TV, ISSN1006-7647, 双月刊)

《水利水电科技进展》主要刊登与水科学、水工程、水资源、水环境等学科有关的科技论文, 辟有水问题论坛、研究探讨、工程技术、专题综述、国外动态、科技简讯等栏目, 适合与水科学、水工程、水资源、水环境、水管理等有关的科学研究人员、工程技术人员、科技管理人员以及大专院校师生阅读。

《水利水电科技进展》由邮局发行, 邮发代号: 28-244, 2006 年每期定价 8 元全年 6 期, 共计 48 元。读者亦可直接向编辑部订阅。欢迎个人和单位直接汇款订阅或函索订单。编辑部地址: 210098 南京市西康路 1 号河海大学《水利水电科技进展》编辑部。联系电话: 025—83786335, E-mail: jz@hhu.edu.cn, http://kkb.hhu.edu.cn。汇款时务请注明“订水利水电科技进展”。