

真空-堆载联合预压软基中 PVD 单元的构造及应用

彭 劼,刘汉龙

(河海大学岩土工程研究所,江苏 南京 210098)

摘要 根据真空-堆载联合预压软基中塑料排水板的作用特点,提出了 PVD 单元的概念以及有限元格式、矩阵表达式,并将其结合到三维 Biot 固结有限元程序中.对真空-堆载联合预压计算例题,用 PVD 单元有限元法、常规有限元法进行了计算、比较,结果表明 PVD 单元有限元法能较好地模拟塑料排水板在真空-堆载联合预压地基中的应用.

关键词 塑料排水板;PVD 单元;三维 Biot 有限元

中图分类号 :TU473 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2005)06-0663-05

真空-堆载联合预压法在很多领域得到了应用.很多学者也对真空-堆载联合预压法的数值计算进行了研究^[1~8].到目前为止,有关真空-堆载联合预压地基塑料排水板(Prefabricated Vertical Drain)地基固结计算的数值分析都是平面应变分析或者单井轴对称分析.单井轴对称分析仅能考虑一块排水板的作用,无法得到地基的横向变形以及荷载作用范围.由于真空-堆载联合预压处理地基有塑料排水板或砂井的存在,平面应变有限元在计算前必须对其进行等效处理,如图 1 所示,即根据轴对称单井与平面应变砂墙之间的固结度相等原则进行等效变换,从而将砂井地基转换为砂墙地基,然后进行平面应变计算.经过此种转换之后,地基中各点的几何位置已经不能和原型一一对应,因此这种平面化方法有比较大的缺陷.一般情况下,转换后的平面应变问题只能较好地计算表面沉降,而对孔压、横向应变等,计算结果不理想.文献[1]则应用三维 Biot 有限元对某真空预压工程进行了计算,将塑料排水板视为实体单元进行划分,计算规模很大.因为计算规模太大,制约了对砂井地基进行三维 Biot 固结分析.

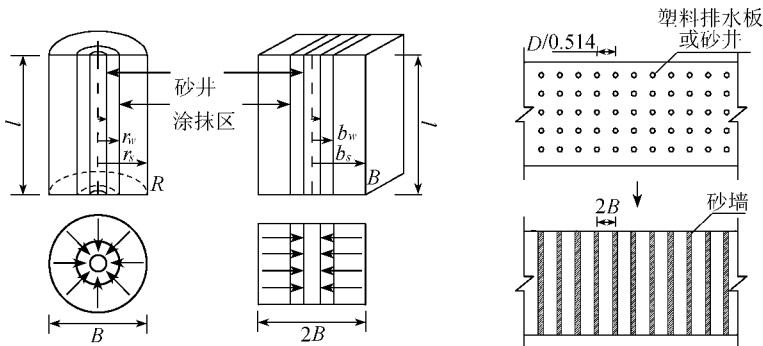


图 1 砂井向砂墙转换示意图

Fig.1 Conversion of sand drain to sand wall

本文提出一种新的三维 PVD 单元,在不增加有限元结点的情况下,能够考虑塑料排水板或砂井的作用.

1 PVD 单元的构造

由于塑料排水板的截面尺寸(一般为 $100\text{ mm} \times 4\text{ mm}$)与周围土体尺寸(一般为 $1.2 \sim 3.0\text{ mm}$)以及自身的长度(一般为 $10 \sim 25\text{ m}$)比较非常小,其主要作用是增加渗透性,而它的力学性能是次要的.因此本文提出了一种 PVD 单元(Prefabricated Vertical Drain element)来模拟地基中的塑料排水板的作用.将排水板考虑为实体

单元的网格划分如图 2(a)所示,本文将排水板视为线单元,与实体单元共用结点 A,B,如图 2(b)所示,不考虑排水板的受剪、受扭性能,而只考虑其轴力以及对总体渗透性能的影响.该思想与混凝土结构中考虑热传递的钢筋单元^[3]类似.目前尚未见有关文献涉及三维情况下排水板的此种简化方法.

图 3 所示的线单元即为本文提出的 PVD 单元,不考虑该单元的自重.由于本文的三维单元采用 8 结点空间等参元,因此,考虑单元之间的协调,PVD 单元为 2 结点轴力杆单元,如图 2(b)所示.下面在通常的线单元基础上将其扩展,参与固结计算.

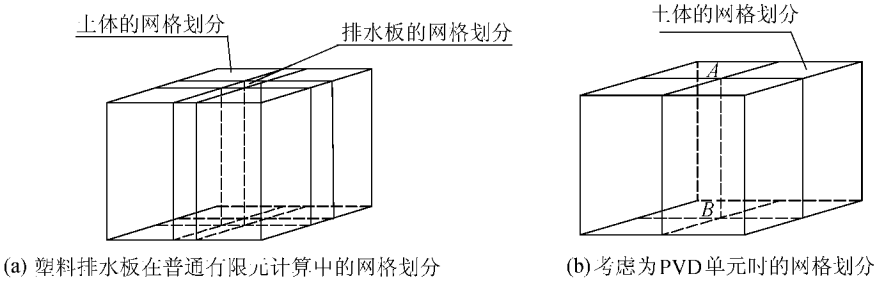


图2 不同情况下的网格划分
Fig.2 Grid division for conventional FEM and PVD element-FEM

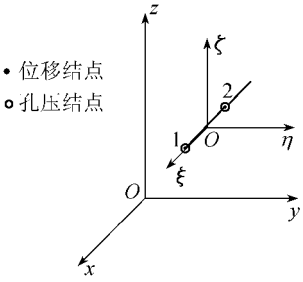


图3 PVD 单元
Fig.3 PVD element

1.1 位移模式及力学劲度矩阵

由于该单元是一维线单元,因此首先给出其在一维空间上的有限元格式,然后再将其转换到总体三维坐标系中去.对于该杆件而言,其只承受轴向力,因此其平衡微分方程为

$$\frac{d}{dx}(A\sigma_x) = f(x) \tag{1}$$

式中: A —— 杆件的名义截面积; f(x) —— 沿线单元的分布荷载.几何关系为

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{2}$$

将 PVD 单元视为弹性体,其应力-应变关系为

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E \frac{du}{dx} \tag{3}$$

边界条件为 $u = \bar{u}$ (端部给定位移); $A\sigma_x = P_b$ (端部给定载荷).可将上述问题转换为求解泛函 $\Pi_p(u)$ 的极值问题.其中

$$\Pi_p(u) = \int_0^l \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l f(x) u dx - \sum_j P_{bj} u_j \tag{4}$$

式中 $u_j = u(x_j)$ 是集中荷载 P_{bj} ($j = 1, 2, \dots$) 作用点 x_j 的位移,由于集中荷载 P_{bj} 也可以看作为包含在分布荷载 $f(x)$ 中的特殊情况,为了讨论方便,以后不单独列出.

将排水板离散为线单元如图 3 所示.在一维情况下,结点的基本未知量为沿杆长度方向的结点位移分量 u_i 和孔压 p_i ,用完备的一次多项式来描述单元的位移模式和孔压,则单元内任意点的位移可表示为

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_2 \tag{5}$$

N_1, N_2 为位移的形函数,可令 $N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$.代入式(5),可进一步求得 $\delta \Pi = 0$,可以得到有限元方程: $K_{\text{bar}} u = P_{\text{bar}}$,其中 $K_{\text{bar}} = \sum_e K_{\text{bar}}^e, P_{\text{bar}} = \sum_e P_{\text{bar}}^e, u = \sum_e u^e$.

$$K_{\text{bar}}^e = \int_0^l EA \left(\frac{dN}{dx} \right)^T \left(\frac{dN}{dx} \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{2EA}{l} \left(\frac{dN}{d\xi} \right)^T \left(\frac{dN}{d\xi} \right) d\xi \tag{6}$$

$$P_{\text{bar}}^e = \int_0^l N^T f(x) dx = \int_{-1}^1 N^T f(\xi) \frac{l}{2} d\xi \tag{7}$$

由于在本研究的实际计算中,集中荷载作用处设置结点,因此集中荷载直接作用在结点上,而无需通过

式(7)进行计算.对本文的 PVD 单元而言,在一维情况下有:

$$K_{\text{bar}}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

将之扩展为空间线单元,可得到其力学劲度矩阵为

$$K_{\text{bar}}^{e-3D} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c_x^2 & & & & & \\ c_x c_y & c_y^2 & & & & \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & & & \\ -c_x^2 & -c_y c_x & -c_z c_x & c_x^2 & & \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_z c_y & c_x c_y & c_y^2 & \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix} \quad \text{对称} \tag{9}$$

式中 c_x, c_y, c_z 为线单元杆轴的方向余弦,即

$$c_x = \cos(\hat{l}, x), c_y = \cos(\hat{l}, y), c_z = \cos(\hat{l}, z)$$

上述矩阵表示的是该 PVD 单元存在对杆端结点的力学上的贡献.

1.2 孔压插值模式及渗流矩阵

对于本文的 PVD 单元而言,轴力和沿杆长方向的水流速度分别影响杆端结点的位移以及水头,因此认为杆端结点的位移不引起排水板的体积变化,即 PVD 单元的体积变化完全由水流的进出造成,而结点孔压的变化对排水板的轴力也没有影响,所以耦合矩阵 K_{bar}^e 为零,而只需考虑渗流矩阵 K_{bar}^s 对整体劲度矩阵的贡献.

先考虑一维情况,单元内任意点的孔压可表示为

$$p(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)p_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)p_2 \tag{10}$$

可令 $N'_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), N'_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), N'_1, N'_2$ 为孔压的形函数.

取出该杆单元的一段,由于 PVD 单元尺寸相对于土体单元以及其长度很小,因此本文假定在该单元的径向,流入的水量和排出的水量相等,则该微分单元的流入水量与流出水量之差按下列方式计算.

令 q_x 为单位时间通过 S 面的渗流量,则有 $q_x = v_x A$,其中 A 为 S 面的面积.则在 Δt 时间内从微元体流出的水量 ΔQ 为

$$\Delta Q = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) \Delta t = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \Delta t = \frac{\partial v_x}{\partial x} A dx \Delta t \tag{11}$$

而 Δt 时间内单元的体积变化为 $\Delta V = \Delta \epsilon_v dx dy dz = -\frac{\partial u}{\partial x} A dx$,由连续条件 $\Delta Q = \Delta V$,可得 $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$,此即渗流连续方程.

根据加权残值法,并利用分部积分法,最终可得其渗流矩阵为

$$K_{\text{bar}}^s = \frac{Ak}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

其时间的离散同三维实体单元.

根据上述离散过程,可得单元的力学、渗流组合劲度矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} K_{\text{bar}}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\theta \Delta t K_{\text{bar}}^s \end{bmatrix} \tag{13}$$

1.3 形成整体刚度

上述组合矩阵是一维情况下,在形成整体刚度的时候,将刚度矩阵扩展至三维情况.力学劲度矩阵前面已经修改.由于结点处的孔压没有方向性,因此渗流矩阵进行空间变换时无需考虑其方向引起的改变.式(14)即为可以直接整合到三维实体单元有限元计算中的 PVD 劲度矩阵.根据上述有限元格式,将 PVD 单元添加到 CRISP84^[2]程序当中.

$$\bar{\mathbf{K}}_{\text{bar}}^{3-D} = \frac{A}{l} \begin{bmatrix} Ec_x^2 & & & & & & & \\ Ec_x c_y & Ec_y^2 & & & & & & \\ Ec_x c_z & Ec_y c_z & Ec_z^2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\theta \Delta tk & & & & \\ -Ec_x^2 & -Ec_y c_x & -Ec_z c_x & 0 & Ec_x^2 & & & \\ -Ec_x c_y & -Ec_y^2 & -Ec_z c_y & 0 & Ec_x c_y & Ec_y^2 & & \\ -Ec_x c_z & -Ec_y c_z & -Ec_z^2 & 0 & Ec_x c_z & Ec_y c_x & Ec_z^2 & \\ 0 & 0 & 0 & \theta \Delta tk & 0 & 0 & 0 & -\theta \Delta tk \end{bmatrix}$$

对称

(14)

2 PVD 单元的数值验证

为了检验 PVD 单元的正确性,本文对真空-堆载联合预压简化的轴对称问题进行了计算,分别用 PVD 单元、通常的三维有限元进行分析,并进行了对比、验证。

计算简图及数值模型如图 4、图 5 所示,PVD 为正方形布置,PVD 半径为 0.1 m。地基表面完全透水。土体采用修正剑桥模型,其中 $\lambda = 0.32, \kappa = 0.06, e_{cs} = 2.00, M = 1.00, k_h = 4.0 \times 10^{-8} \text{cm/s}, k_v = 2.0 \times 10^{-8} \text{cm/s}$ 。PVD 采用线弹性模型,材料性质如图 5(a) 所示。

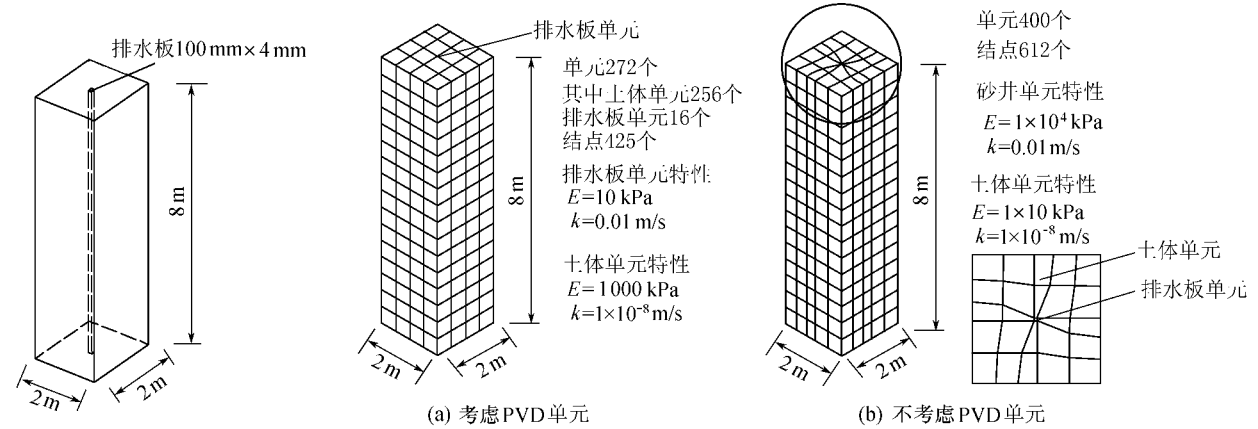


图 4 计算简图

图 5 网格划分

Fig.4 Sketch of computation

Fig.5 Grid division

采用 PVD 单元的有限元计算模型及一般三维方法的计算模型分别如图 4~5 所示。其中模型底部位移固定,不排水。四周仅能容许竖向位移,同样不透水。表面位移自由,且是自由排水面。荷载曲线如图 6 所示。

上述两种情况下,PVD 单元的表面平均沉降、分层沉降等数据曲线如图 7 和图 8 所示。

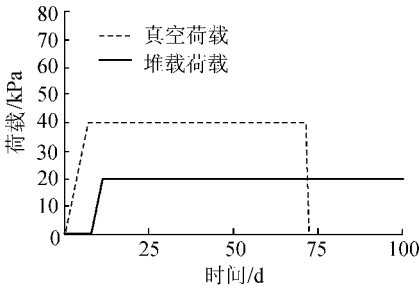


图 6 加载曲线

Fig.6 Loading curve

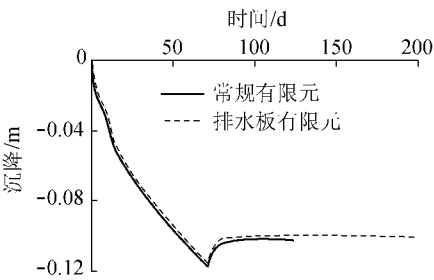


图 7 表面沉降

Fig.7 Surface settlement

从计算结果来看,两者结果很接近,表明了该 PVD 单元的适用性。

上述算例中,采用 PVD 单元的有限元模型单元数量和结点数量分别为常规有限元模型的 68% 和 69%。对于一般的地基三维计算模型而言,考虑 PVD 单元的结点数量约为常规有限元的 56%,其结点的减少量非常明显。

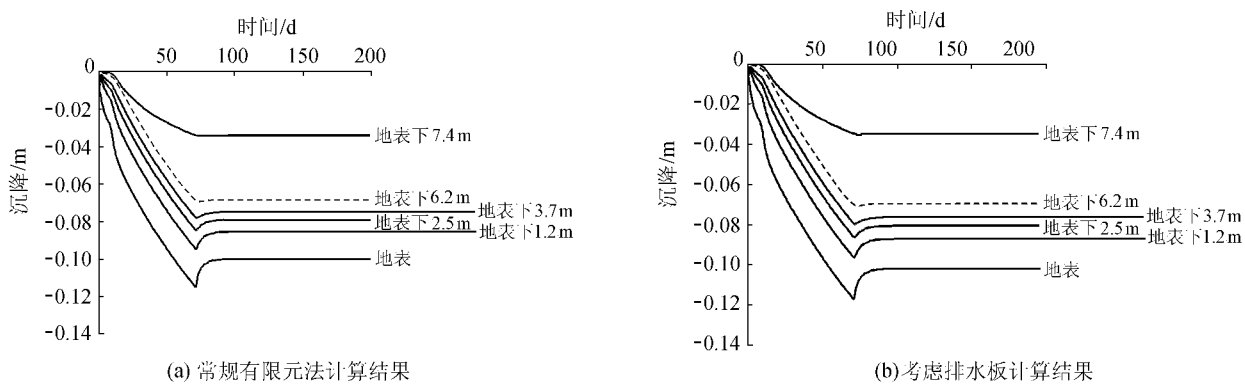


图 8 分层沉降
Fig.8 Layered settlement

3 结 论

本文根据真空-堆载联合预压地基中的排水板作用特点,推导了三维 PVD 单元的有限元格式、矩阵表达式,并将其结合到三维 Biot 固结有限元程序中去.将 PVD 单元有限元法、常规有限元法进行了真空-堆载联合预压问题计算的比较,比较结果表明 PVD 单元有限元法能较好地模拟真空-堆载联合预压过程,且 PVD 单元的应用可以大大减少计算量.

参考文献：

[1] 刘汉龙,彭劼.真空-堆载联合预压处理高速公路软基三维有限元计算[J].岩土力学,2003,24(6):247—252.
[2] BRITTO A M, GUNN M J. Critical state soil mechanics via finite elements[M]. New York: John Wills&sons,1984.49—83.
[3] 彭劼.真空-堆载联合预压法加固机理与计算理论研究[D].南京:河海大学,2003.
[4] 彭劼,刘汉龙,陈永辉.真空-堆载联合预压法处理大面积软基的简化数值分析方法[A].见:中国土木工程学会主编.中国土木工程学会第九届土力学及岩土工程学术会议论文集[C].北京:清华大学出版社,2003.463—467.
[5] INDRARATNA B, REDANA I W. Numerical modeling of vertical drain with smear and well resistance installed in soft clay[J]. Canadian Geotechnical Journal,2000,37(2):132—145.
[6] 余志颀,赵维炳,顾吉.粘弹-粘塑性软基排水预压的三维有限元分析[J].河海大学学报(自然科学版),1995,23(5):7—13.
[7] 余湘娟,吴跃东,赵维炳.真空预压法对加固区边界影响的研究[J].水利学报,2002(9):123—128.
[8] 彭劼,刘汉龙,陈永辉.真空-堆载联合预压法加固机理讨论[J].河海大学学报(自然科学版),2003,31(5):560—563.

Structure of PVD element and its application to soft ground improved
by vacuum-surge preloading

PENG Jie, LIU Han-long

(Geotechnical Research Institute of Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract Based on the characteristics of prefabricated vertical drains (PVD) in soft ground, the FE form and matrix expression of PVD were proposed and introduced to the 3-D Biot program. A case study of numerical calculation of a soft ground improved by vacuum-surge preloading with PVD element-FEM and conventional FEM shows that the present method is good in simulation of PVD applied to soft ground improved by vacuum-surge preloading.

Key words PVD; PVD element; 3-D Biot FEM