

模拟不连续介质的非连续有限元法

夏晓舟¹ ,章 青¹ ,李国华¹ ,徐道远¹ ,刘光焰²

(1. 河海大学土木工程学院 ,江苏 南京 210098 ; 2. 桂林工学院土木工程系 ,广西 桂林 541004)

摘要 :在传统有限元的框架上提出一个能模拟诸如裂纹、节理等非连续性结构的新技术——非连续有限元法 ,该方法通过反映非连续场和尖端渐进场的附加函数来丰富传统有限元的近似模式 ,以达到场内非协调的目的 ,该技术允许整个非连续性结构独立于网格 ,使得在模拟非连续性结构(裂纹、节理等)的演化发展时无需重剖网格 .详细讨论了非连续附加函数的构造 ,并用弱解形式推导了非连续有限元格式 ,并给出算例 .

关键词 :非连续有限元 ;附加自由度 ;非连续附加函数

中图分类号 :TB124 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-1980(2005)06-0682-06

结构中存在的或演化过程中出现的诸如节理、裂纹和孔隙等非连续性局部结构往往对整个结构的失稳或破坏起着控制作用 ,因此 ,非连续性结构部位是工程力学问题分析的热点和难点 .长期以来 ,人们在这方面积累了许多经验并获得丰厚成果 ,诸如块体元理论^[1]、界面元理论^[2]、流形元理论^[3]等 ,但这些理论由于非连续性结构对于网格的依赖性导致网格在演化计算中的不断重剖分而不尽人意 .美国西北大学 Belytschko 等^[4,5]提出的扩展有限元法(extended finite element method) ,就是把诸如裂纹、节理等非连续性结构嵌入单元内部 ,使得在进行非连续性结构(如裂纹扩展)的演化计算时无须网格重剖分就能顺利进行 .笔者在分析 Belytschko 等提出的扩展有限元法时 ,发现其导出的刚度矩阵存在一些问题 .为此 ,笔者在 Belytschko 等的工作基础上 ,构造了非连续附加函数 ,推导了非连续有限元的弱解格式 ,给出了刚度矩阵 .文中给出两个算例 ,算例结果表明 ,该方法是进行结构破坏演化分析的一种有效方法 .

1 非连续有限元的基本原理

为了描述上的方便 ,本文以二维弹性静力裂纹问题来加以说明 ,其他如节理、孔隙等非连续性结构都是一样 ,至于动力或三维问题则很容易扩展 .

1.1 非连续有限元中的位移模式

选择位移模式的一般形式为

$$u(x) = \sum_i N_i(x) u_i + a_i \phi_i(x) \tag{1}$$

式中 : u_i ——节点 i 的自由度 ; N_i ——传统单元中节点 i 的形函数 ; i ——指构成网格单元的所有节点 ; a_i ——节点 i 的附加自由度 ; $\phi_i(x)$ ——附加非连续函数 ,是考虑非连续性结构的影响而给节点 i 的丰富函数 .下面具体描述这种附加非连续函数 $\phi_i(x)$,为了描述方便 ,这里只针对各向同性材料 .

先讨论裂纹处在均质单元中的情形 ,然后讨论裂纹处在非均质材料的单元中 ,即属于界面裂纹的情形 .

1.1.1 均质单元中的裂纹情形

裂纹含在有限元网格中有两种情况 ,一种是把单元截成两块 ,另一种则是裂纹尖端终止于单元内部 ,见图 1 .

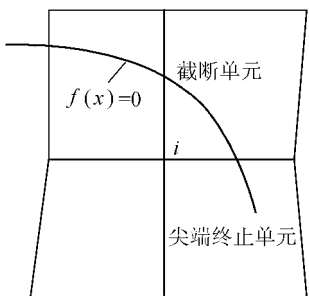


图 1 单元中的裂纹
Fig.1 Crack in elements

对于横跨单元的裂纹, 构造的附加非连续函数必须体现位移在裂纹处的不连续性(即跨越), 另外, 单元中的点距裂纹的最短距离越远, 裂纹对该点的影响就越弱. 先定义最短距离 $d(x)$ 为

$$d(x) = \min_{x \in \Gamma(x)=0} \|x - \bar{x}\| \operatorname{sign}(f(x)/f(x_i)) \tag{2}$$

式中 $f(x)=0$ 为裂纹的曲线方程. 在距离函数中引入符号函数是为了区分裂纹两侧距离相等的点. 根据上述可构造附加非连续函数 $\phi_i(x)$ 的形式为

$$\phi_i(x) = h(d(x)) = \begin{cases} e^{-d(x)} & d(x) > 0 \\ -e^{d(x)} & d(x) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

其函数曲线如图 2 所示.

对于尖端终止于单元内部的裂纹, 构造的附加非连续函数除了要求能体现裂纹处的位移不连续性, 还必须能体现裂纹尖端渐进位移场的奇异性. 由断裂力学的知识^[4]可知, 不管是哪一种裂纹形式(I, II, III), 裂纹尖端位移场都可由下面几个基函数组成的函数形式来表达, 即

$$\{F^l(x)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\theta \right\} \tag{4}$$

假设以裂纹尖端的延伸线为局部极坐标(图 3), 裂纹延长线可由式(5)确定:

$$\nabla f_A \cdot (x - x_A) = 0 \tag{5}$$

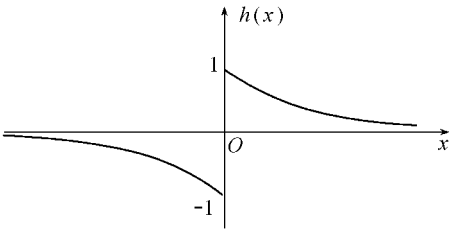


图 2 间断函数 $h(x)$

Fig.2 Discontinuous function $h(x)$

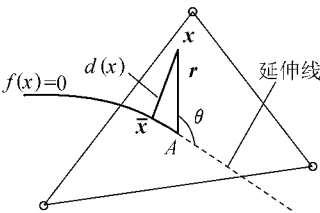


图 3 裂纹尖端的延伸线及任意一点的极坐标确定

Fig.3 Construction of extension from the tip of a crack and polar coordinates of an arbitrary point in element

单元中任意一点与基函数有关的三角函数确定如下

$$\sin\theta = \frac{d(x)}{r}, \quad \cos\theta = \frac{\bar{x} - x_A}{r} \quad (-\pi < \theta < \pi) \tag{6}$$

式中 $\bar{x}$ 为 x 在裂纹线或延伸线上的投影点, 则

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \tag{7}$$

于是可定义附加非连续函数 $\phi_i(x)$ 的形式为

$$a_{i\beta} \phi_i(x) = \sum_{\beta=1}^4 a_{i\beta} F_{\beta}^l(x) \tag{8}$$

1.1.2 界面裂纹的情形

不同材料或者不同相之间容易产生界面裂纹. 按一般的有限元, 只要把单元的边贴在界面上就可模拟不同材料之间的力传递, 但一旦界面发生脱落或滑移, 则不免要重新剖分网格, 非常麻烦. 为此, 本文借助上述思想, 在单元内部引入附加项. 定义刚度比 η 为

$$\eta = \frac{\|E_1 - E_2\|}{\max(E_1, E_2)} \tag{9}$$

式中 E_1, E_2 分别对应单元中两种材料的弹性模量. 考虑到界面硬性材料那一侧的位移相对软的那一侧位移要小, 或者说硬性材料那一侧受界面裂纹的影响小, 非连续附加函数可按下列规则来定义

如果 $E(x_i) = \max(E_1, E_2)$ 则

$$\phi_i(x) = h(d(x)) = \begin{cases} \eta e^{-d(x)} & d(x) > 0 \\ -e^{d(x)} & d(x) < 0 \end{cases} \tag{10}$$

否则

$$\phi_i(x) = h(d(x)) = \begin{cases} e^{-d(x)} & d(x) > 0 \\ -\eta e^{d(x)} & d(x) < 0 \end{cases} \quad (11)$$

需要说明一下,以上所有位移模式都只是针对裂纹(包括界面裂纹)张开和闭合的情形,而对于裂纹滑移的情形则可以通过接触单元的方式来模拟,这里不予考虑.

节点 i 的真实位移是由两部分组成,一部分为 u_i ,另一部分为 $a_i\phi_i(x_i)$,其中 x_i 为节点 i 的坐标.从位移模式不难看出,位移除了在非连续性结构部位处不是连续外,其他部位(包括节点)均保持连续性.从数学上看,该位移模式的一个显著特点是插值点的函数值是随位置而动的,因而要考察它的收敛性就必须着眼于插值形函数和插值点函数值的随动规律,即非连续附加函数的特点.插值形函数 N_i 是基于传统有限元下的形函数,因而能够反映单元的刚体位移和单元的常应变,在这个意义上,随着单元尺寸的减小精度是逐步提高的,即收敛的.由于非连续附加函数是距离的函数,与单元尺寸无关,所以它的精度不依赖于单元的剖分,而依赖于它与距离之间的函数关系,之所以选择指数函数的形式,除了因为在数学上便于处理外(容易积分和求导),还由于它比较符合实际破裂后的变形情况.

1.2 控制方程和弱解形式

1.2.1 控制方程

平衡方程和边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \sigma + b = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \bar{u} & \text{on } \Gamma_u^\tau \\ \sigma \cdot n = \bar{t} & \text{on } \Gamma_t^\tau \\ \sigma \cdot n = 0 & \text{on } \Gamma_c^\tau \quad (\text{张开时}) \\ \sigma_A \cdot n_A + \sigma_B \cdot n_B = 0 & \text{on } \Gamma_c^\tau \quad (\text{闭合时}) \\ u_A \cdot n_A + u_B \cdot n_B \leq 0 & \text{on } \Gamma_c^\tau \quad (\text{裂纹面互不嵌入条件}) \end{array} \right. \quad (12)$$

式中: b ——体力; Ω ——域内; $\bar{u}$ ——边界上的位移; $\bar{t}$ ——边界上的力; Γ_u^τ —— τ 时刻的位移边界; Γ_t^τ —— τ 时刻的力边界; Γ_c^τ —— τ 时刻的所有裂纹表面(包含介质间断面 Γ_d); n_A 和 n_B ——对应裂纹的两个自由表面 A 和 B 的外法线向量(图4).

假设考虑的问题为小变形(小应变和小位移),则几何方程即应变-位移关系为

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \nabla_s u \quad (13)$$

式中 ∇_s 为梯度算子的对称部分.本构关系由广义胡克定律给出

$$\sigma = C : \varepsilon \quad (14)$$

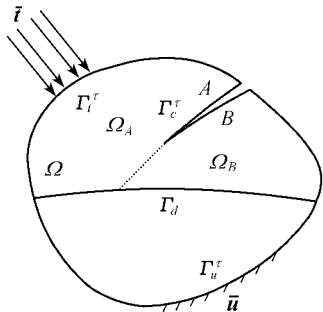


Fig.4 Sketch of all kinds of boundaries at the time τ

1.2.2 弱解形式

试探函数空间定义为

$$U = \{u(x,t) | u(x,t) \in C^0, u(x,t) = \bar{u}(t) \text{ on } \Gamma_u^t, u \text{ 不连续 on } \Gamma_c^t, \lambda \geq 0, \lambda \in C^{-1}\} \quad (15)$$

测试函数(权函数)空间定义为

$$U_0 = \{\delta u(x) | \delta u(x) \in C^0, \delta u(x) = 0 \text{ on } \Gamma_u^t, \delta u \text{ 不连续 on } \Gamma_c^t, \delta \lambda \geq 0, \delta \lambda \in C^{-1}\} \quad (16)$$

接触条件(互不嵌入条件)通过拉格朗日乘子 λ 加入到弱解方程中去,则平衡方程的弱解形式就是一个不等式,即找试探函数 $u(x,t) \in U_0$ 和乘子 $\lambda \in C^{-1}$ 以满足

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon : \sigma - \delta u \cdot b) d\Omega - \int_{\Gamma_t^t} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_c^t} \lambda (u_A \cdot n_A + u_B \cdot n_B) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \delta u \in U_0 \quad (17)$$

代入几何方程和本构方程,则弱解形式可表述为

$$\int_{\Omega} (\delta \nabla_s u^T : C : \nabla_s u - \delta u \cdot b) d\Omega - \int_{\Gamma_t^t} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_c^t} \lambda (u_A \cdot n_A + u_B \cdot n_B) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \delta u \in U_0 \quad (18)$$

1.3 网格离散化

为表达方便,直接在自由度右下方(即下标位置)加“ e ”以表示节点自由度,如: u_e, a_e .把网格离散化后,

式(18)就变为

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\Omega^e} (\delta \nabla_s \mathbf{u}^T : \mathbf{C} : \nabla_s \mathbf{u} - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_t^e} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_c^e} \lambda (\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A + \mathbf{u}_B \cdot \mathbf{n}_B) d\Gamma \right] \geq 0 \quad (19)$$

式中 N_e 为单元总数目,假设 $\lambda(x) = \sum_i N^i \lambda_e$

$$\mathbf{u}_N = (\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B) \mathbf{n}_A = \mathbf{n}_A \mathbf{N} \mathbf{a}_e (h(d(x_A)) - h(d(x_B))) = 2 \mathbf{n}_A \mathbf{N} \mathbf{a}_e \quad (20)$$

把(1)和(20)式代入式(19),得

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \left[\delta \mathbf{u}_e^T \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e + \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a \mathbf{a}_e - \mathbf{N}^T \mathbf{b}) d\Omega - \delta \mathbf{u}_e \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \right. \\ & \delta \mathbf{a}_e^T \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u}_e + \mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a \mathbf{a}_e - (\mathbf{N} \phi)^T \mathbf{b}) d\Omega - \delta \mathbf{a}_e \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N} \phi)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \\ & \left. \delta \lambda_e^T \int_{\Gamma_c^e} 2 \mathbf{n}_A \mathbf{N}^i \mathbf{N} \mathbf{a}_e d\Gamma + \delta \mathbf{a}_e^T \int_{\Gamma_c^e} 2 \mathbf{n}_A \mathbf{N}^i \mathbf{N} \lambda_e d\Gamma \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\mathbf{B}_{ui} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ai} = \begin{bmatrix} N_{i,x} \phi_i + N_i \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \phi_i + N_i \phi_{i,y} \\ N_{i,y} \phi_i + N_i \phi_{i,y} & N_{i,x} \phi_i + N_i \phi_{i,x} \end{bmatrix}$$

将单元节点自由度用结构节点自由度表示如下:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{g}_u \mathbf{u}, \mathbf{a}_e = \mathbf{g}_a \mathbf{a}, \lambda_e = \mathbf{g}_\lambda \lambda \quad (22)$$

式中 $\mathbf{g}_u, \mathbf{g}_a, \mathbf{g}_\lambda$ 为选择矩阵.

$$\text{令} \quad \mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u d\Omega, \mathbf{K}_{ua}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a d\Omega, \mathbf{K}_{aa}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a d\Omega, \mathbf{G}^e = \int_{\Gamma_c^e} 2 \mathbf{n}_A \mathbf{N}^i \mathbf{N} d\Gamma$$

所以式(21)化为

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{u}^T \left[\sum_e \mathbf{g}_u^T \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{g}_u \mathbf{u} + \sum_e \mathbf{g}_u^T \mathbf{K}_{ua}^e \mathbf{g}_a \mathbf{a} - \sum_e \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) \right] + \\ & \delta \mathbf{a}^T \left[\sum_e \mathbf{g}_a^T \mathbf{K}_{au}^e \mathbf{g}_u \mathbf{u} + \sum_e \mathbf{g}_a^T \mathbf{K}_{aa}^e \mathbf{g}_a \mathbf{a} - \sum_e \left(\int_{\Omega^e} (\mathbf{N} \phi)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N} \phi)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) \right] + \\ & \delta \lambda^T \sum_e \mathbf{g}_\lambda^T \mathbf{G}^e \mathbf{g}_a \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \sum_e \mathbf{g}_a^T \mathbf{G}^e \mathbf{g}_\lambda \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \sum_e \mathbf{g}_u^T \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{g}_u, \mathbf{K}_{ua} = \sum_e \mathbf{g}_u^T \mathbf{K}_{ua}^e \mathbf{g}_a, \mathbf{K}_{aa} = \sum_e \mathbf{g}_a^T \mathbf{K}_{aa}^e \mathbf{g}_a, \mathbf{G} = \sum_e \mathbf{g}_\lambda^T \mathbf{G}^e \mathbf{g}_a, \\ \mathbf{f}_{ext} &= \sum_e \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right), \mathbf{q}_{ext} = \sum_e \left(\int_{\Omega^e} (\mathbf{N} \phi)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t^e} (\mathbf{N} \phi)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right) \end{aligned}$$

所以,离散方程的弱解形式式(23)可写为

$$\delta \mathbf{W} = \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{ua} \mathbf{a} - \mathbf{f}_{ext}) + \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K}_{ua}^T \mathbf{u} + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{a} - \mathbf{q}_{ext} + \mathbf{G}^T \lambda) + \delta \lambda \mathbf{G} \mathbf{a} \geq 0 \quad (24)$$

因为 $\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{a}, \delta \lambda$ 是任意的,且 $\delta \lambda \geq 0, \lambda \geq \alpha$ (见式(15)和(16)),所以式(24)等价于

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{ua} \mathbf{a} - \mathbf{f}_{ext} = 0 \\ \mathbf{K}_{ua}^T \mathbf{u} + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{a} - \mathbf{q}_{ext} + \mathbf{G}^T \lambda = 0 \\ \mathbf{G} \mathbf{a} \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

化为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} & 0 \\ \mathbf{K}_{ua}^T & \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{G}^T \\ 0 & \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{q}_{ext} \\ \geq 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

1.4 积分策略

$\mathbf{K}_{uu}^e$ 积分方法和传统有限元法一样,这里就不再赘述.而对于 $\mathbf{K}_{ua}^e$ 和 $\mathbf{K}_{aa}^e$,由于其含有在裂纹处不可导的 $\mathbf{B}_a$,即 $\mathbf{B}_a$ 在非连续处无意义(但 $\mathbf{B}_a$ 在单元域内是可积的),因而积分就不能按传统有限元的处理方法,具体

可采用分块积分的办法.对于被裂缝截断的单元,可分别在截断的两个子域中进行数值积分即可,对于裂纹尖端终止的那个单元,则首先沿裂纹尖端切线方向延伸裂纹以把单元分成两块子域,然后再在各子域上数值积分,最后,把各子域上的积分值相加即得整个单元域的积分值.关于这方面的其他积分方案见文献[7,8].

2 算例

算例1:一个平面薄板,在板中央含有一小的斜裂纹,在其两端施以均布、单调增加的拉力,如图5所示.采用非连续有限元离散技术,计算结果见图6.其中裂纹的扩展方向按裂纹尖端最大主应力的垂直方向发展.整个裂纹的演化计算过程为:算出裂纹尖端的应力强度因子,判断裂纹是否失稳,若裂纹失稳,则裂纹按扩展的方向伸长一个距离,假设为 ΔS ,根据能量耗散理论来判断裂纹扩展 ΔS 是否仍保持稳定,若不稳定,则继续试探一个伸长距离,一直到裂纹稳定为止.当裂纹尖端由一个单元跨到另一个单元时,需对这两个单元的属性加以修改,即原来裂尖终止的单元改为被裂纹截断的单元,而裂尖抵达的单元则改为含裂尖的单元.

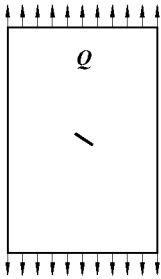


图5 平面薄板中的斜裂纹及所受荷载

Fig.5 Slantwise crack in a thin plate and the load on it

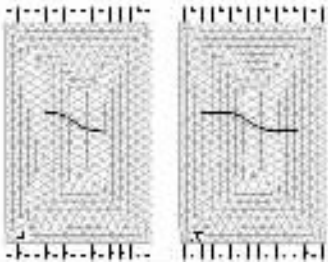


图6 任意捕捉的两个瞬时裂纹生长

Fig.6 Two snapshots of the crack growth

算例2:一个含圆形夹杂的平板,竖向受均布拉力作用,横向受到与竖向大小相同的均布压力作用,见图7.采用本文非连续有限元方法进行计算,计算后,其界面的发展如图8所示.

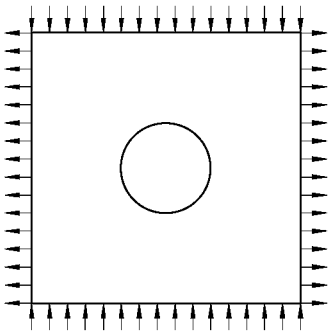


图7 含圆形夹杂的平板及其所受荷载

Fig.7 Circular inclusion in plate and the load on it

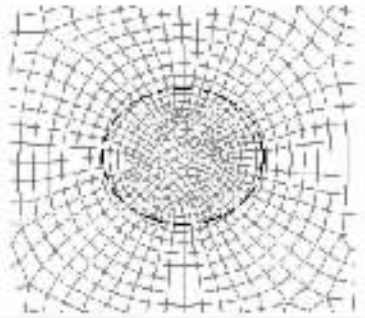


图8 界面的发展

Fig.8 Development of the interface

3 讨论

表面上看来,非连续有限元法的一个致命弱点就是在含裂缝的单元系统中每个节点的自由度包含主自由度和附加自由度两部分,其实并非想像的那样繁琐,因为附加自由度能够通过单元中增设额外的节点(称虚节点)来处理,比如对于被非连续性结构截断的3节点三角形单元可变成6节点单元来处理.当然,对于裂纹终止的那个单元则需增加4倍原单元的节点数目,但总比重新剖分网格来的轻松,因而并不给整体计算带来许多麻烦.但在进行非连续性结构的演化(如裂纹扩展)计算时,由于裂纹的扩展导致单元属性的改变,即原来裂尖终止的单元变为被裂纹截断的单元,裂尖新抵达的单元变为含裂尖的单元,而给计算带来一定的麻烦,因为这种属性的变化恰恰是附加节点的变化,因此编号显得有点繁琐,仍然没有很好地突破传统有限元重剖网格带来的节点编号繁琐问题.但从该方法中仍然可以看到一些希望,那就是,如果裂尖渐进场不采用这种由多个基函数构成的函数形式,而仅采用一个基函数形式,如 $\sqrt{r}\sin(\theta/2)$,另外,所有不含裂缝的单元也采用本文的非连续性单元形式(仔细推敲一下,精度还会提高,因为裂缝对结构的所有部位都会产生影响,只是距离裂缝远的地方影响很小),这样,整个计算网格中所有单元的节点数目都是一样的,都等于传

统单元节点数目的 2 倍,在进行演化计算时则方便得多,本文的算例就是这样处理的,只是裂尖场的精度相对不高,但对于一般工程问题还是能够满足要求的.

非连续有限元法同样可以扩展到三维问题和动力问题中去.虽然附加自由度的增加导致计算量的偏大,但较网格重剖分的工作量小.

参考文献：

[1] 王泳嘉,邢继波.离散单元法及其在岩土工程中的应用[M].哈尔滨:东北工学院出版社,1991.1—65.
[2] 卓家寿,章青.不连续介质力学问题的界面元法[M].北京:科学出版社,2001.1—262.
[3] 石根华.数值流形方法与非连续变形分析[M].北京:清华大学出版社,1997.1—125.
[4] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45 :601—620.
[5] BELYTSCHKO T, MOES N, USUI S, et al. Arbitrary discontinuities in finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50 :993—1013.
[6] 切列帕诺夫.脆性断裂力学[M].黄克智,译.北京:科学出版社,1990.1—60.
[7] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46 :131—150.
[8] STROUBOULIS T, COPPS K, BABUSKA I. The generalized finite element method : an example of its implementation and illustration of its performance[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47 (8) :1401—1417.

Discontinuous finite element method for simulation of discontinuities

XIA Xiao-zhou¹, ZHANG Qing¹, LI Guo-hua¹, XU Dao-yuan¹, LIU Guang-yan²

(1. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;

2. College of Civil Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract :A new technique for modeling discontinuities, such as cracks and joints in the finite element framework, was presented. A standard displacement-based approximation was enriched near a discontinuity by incorporating the enrichment functions for both discontinuous fields and near tip asymptotic fields. The technique allows the entire discontinuities to be independent of the mesh, therefore remeshing is unnecessary to model the evolvement of discontinuities. Moreover, the construction of the discontinuous enrichment function was discussed in detail, and the discontinuous finite element discrete equation was deduced from the weak form. Numerical experiments were provided to demonstrate the utility and robustness of the proposed technique.

Key words :discontinuous finite element ; enriched freedom degree ; discontinuous enrichment function