

赋权图过指定点的圈

卞秋香¹ 孙志人²

(1.江苏科技大学数理学院,江苏 镇江 212003;2.南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

摘要:设 G 是满足条件 D_1 和 D_2 的 2-连通非 Hamilton 赋权图,证明了如下新结果:若 G 满足 $d^w(x)+d^w(y)\geq m(xy\notin E(G),x\neq y)$,则通过图 G 的每个顶点存在权重大于或等于 m 的圈.该结果推广了非赋权图的已有结果.

关键词 赋权图 赋权度 Hamilton 圈

中图分类号:O157.5 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2005)06-0721-04

本文只讨论有限简单图,未加定义的概念与记号可见文献[1].设 $G=(V,E)$ 为一个图,对 $v\in V$,分别用 $N(v)$ 与 $d(v)$ 表示 v 在 G 中的邻点集和邻点数, $d(x,y)$ 表示 G 中 x 与 y 的距离.对 $\emptyset\neq D\subset V(G)$, $G[D]$ 表示 G 的由 D 导出的子图, $G-D$ 表示 G 的由 $V(G)\setminus V(D)$ 导出的子图.对 $x\in V(G)$,简单地用 $G-x$ 表示 $G-\{x\}$.用 X 表示一给定了方向的圈或路,若 $u,v\in V(X)$,用 uXv 表示 X 上沿指定方向从 u 到 v 的子路.如果顶次序相反,用 vXu 表示.习惯上令 $X[u,v]=uXv$,并把它既作为路又作为顶点集.图 G 称为赋权图,若每条边 e 被指定一个非负数 $w(e)$ 称为 e 的权. G 的子图 H 的权定义为

$$w(H)=\sum\{w(e)|e\in E(H)\}$$

顶点 v 在 H 中的赋权度定义为

$$d_H^w(v)=\sum\{w(vh)|h\in N_H(v)\}$$

在不引起混淆的情况下用 $d^w(v)$ 表示 $d_H^w(v)$.赋权图 G 满足的条件 D_1 和 D_2 定义如下: D_1 : $xy\notin E(G)$ 且 $xz,zy\in E(G)$ 时, $w(xz)=w(zy)$; D_2 :在 G 的每一个三角形中,或者三条边的权互异,或者三条边的权相同.

某类子图中权最大的又叫最重的.非赋权图可看作每条边指定权 1 的赋权图.显然非赋权图符合 D_1 和 D_2 ,且最重最长路即为最长路.文献[2~7]给出了许多将非赋权图中的结论推广到赋权图的结果.本文研究满足 D_1 和 D_2 两条件的赋权图 G ,证明了如下定理.

定理 1 设 G 是 2-连通非 Hamilton 赋权图,满足 D_1 和 D_2 ,且 $d^w(x)+d^w(y)\geq m(xy\notin E(G),x\neq y)$,则通过图 G 的每一顶点存在权重大于或等于 m 的圈.

定理 1 是对 Enomoto 给出的如下结论的一个推广.

定理 1^[8] 设 G 是 2-连通非 Hamilton 图,满足 $d(x)+d(y)\geq m(xy\notin E(G),x\neq y)$,则通过图 G 的每一顶点存在长度大于或等于 m 的圈.

1 有关引理

引理 1^[7] 设 x,y 是 2-连通赋权图 G 中的两个不同顶点, d 是一实数.若对所有 $v\in V(G)-\{x,y\}$ 满足 $d^w(v)\geq d$,则对每一顶点 z , G 包含一条连接 x 与 y 的路,此路过 z 且其权重至少为 d .

引理 2 设 G 是以 $\{x,y\}$ 为顶点割的 2-连通赋权图,满足 $d^w(x)+d^w(y)\geq m(xy\notin E(G),x\neq y)$,那么过 G 的每一个顶点存在权重至少为 m 的圈.

证 设 z 为给定顶点.由已知 $G-x-y$ 是不连通的,令 $G'=G-x-y$, G_1 是 G' 包含 z 的连通分支(若 $z\in\{x,y\}$ 则取 G' 的任一连通分支作为 G_1),且 G_2 是 G' 的另一连通分支.令

$$k=\min\{d^w(u)|u\in V(G_1)\}$$

$$k' = \min\{d^u(u) \mid u \in V(G_2)\}$$

显然 $k + k' \geq m$. 令

$$H_i = [V(G_i) \cup \{x, y\}] + xy \quad (i = 1, 2)$$

若 $xy \notin E(G)$, 则令 $u(xy) = 0$. 显然 H_1 和 H_2 是 2-连通的, 由引理 1, 在 H_1 中存在连接 x 与 y , 且过 z 的路 P_1 , 且 $u(P_1) \geq k$. 在 H_2 中存在连接 x 与 y 的路 P_2 , 且 $u(P_2) \geq k'$. 合并 P_1, P_2 得到一个过 z 的圈 C , 且 $u(C) \geq k + k' \geq m$. 命题得证.

引理 3 设赋权图 G 满足条件 D_1 和 D_2 , $v_1 v_2 v_3 v_4$ 是 G 中的路, $v_3, v_4 \notin E(G)$, 则 $u(v_1 v_2) = u(v_2 v_3) = u(v_3 v_4)$.

证 设 $u(v_1 v_2) = w_1$, 对路 $v_1 v_2 v_3$ 用 D_1 得 $u(v_2 v_3) = u(v_1 v_2) = w_1$. 若 $v_2 v_4 \notin E(G)$, 由 D_1 得 $u(v_3 v_4) = u(v_2 v_3) = w_1$. 若 $v_2 v_4 \in E(G)$, 先由 D_1 得 $u(v_2 v_4) = u(v_1 v_2) = w_1$, 再对三角形 $v_2 v_3 v_4 v_2$ 用 D_2 , 得 $u(v_3 v_4) = w_1$. 引理 3 得证.

引理 4 设 G 是满足条件 D_1 和 D_2 的 3-连通非 Hamilton 赋权图, $P = v_0 v_1 \dots v_l$ 是 G 中通过给定点 z 的一条最重最长路, $p = \max\{i \mid v_i \in N(v_0)\}$. 若 G 满足条件 D : 对于 $G[V(P[v_0, v_p])]$ 中每一条以 v_p 为端点且权重不变的 Hamilton 路, 另一端点 u 满足 $N(u) \subseteq V(P[v_0, v_p])$, 则存在以 $V(P[v_0, v_p])$ 为顶点权重大于或等于 m 的圈.

证 由 P 的最长性及 G 的连通性和非 Hamilton 性, $N(v_0) \subseteq V(P)$, $N(v_l) \subseteq V(P)$, 且 $v_0 v_l \notin E(G)$. 为了证明引理 4, 首先证明 4 个断言.

断言 1 若 $v_l \in N(v_0)$, 则 $N(v_{l-1}) \subseteq V(P[v_0, v_p])$.

证 由 P 的最长性及 G 的连通性和非 Hamilton 性, $N(v_{l-1}) \subseteq V(P[v_0, v_{l-1}])$. 因而若结论不成立, 则 v_{l-1} 在 $V(P[v_{p+1}, v_{l-1}])$ 中必存在邻点, 令 v_n 是 $V(P[v_{p+1}, v_{l-1}])$ 中第一个与 v_{l-1} 相邻的点. 记 $u(v_0 v_l) = w_1$, $u(v_{l-1} v_l) = w_2$.

情形 1 $w_1 = w_2$.

路 $v_{l-1} v_0 v_l v_{l-1}$ 是另一条过 z 的最重最长路, 与条件 D 矛盾. 此时断言 1 成立.

情形 2 $w_1 \neq w_2$.

对路 $v_0 v_l v_{l-1}$ 用 D_1, D_2 得 $v_0 v_{l-1} \in E(G)$, 其权 $\neq w_1, w_2$, 设为 w_3 . 对路 $v_0 v_{l-1} v_n v_{n+1}$ 用引理 3 得 $u(v_n v_{n+1}) = u(v_{l-1} v_n) = u(v_0 v_{l-1}) = w_3$. 对路 $v_{l-1} v_n$ 用 D_1, D_2 得 $v_l v_n \in E(G)$, 对路 $v_0 v_l v_n v_{n+1}$ 用引理 3 得 $u(v_n v_{n+1}) = u(v_0 v_l) = w_1 \neq w_3$. 与条件 D 矛盾. 此时断言 1 成立. 断言 1 得证.

由 G 的 3-连通性, $H = G - v_p$ 是 2-连通的. 若任意 $v_j (1 \leq j \leq p)$ 满足 $v_j \in N(v_0)$, 则由断言 1 得 $N(v_{j-1}) \subseteq V(P[v_0, v_p])$, 由此 $G - v_p$ 是不连通的, 矛盾. 故一定存在整数 i, l 满足 v_i 在 H 中的邻点集 $N_H(v_i) \not\subseteq V(P[v_0, v_p])$, $w_0 v_l \in E(G)$, $1 \leq i < l \leq p$ 且 $i < l - 1$. 在 $G[V(P[v_0, v_p])]$ 中选择以 v_p 为端点的 Hamilton 路, 使路 P 在权重不变下 $l - i$ 最小. 设路 P 变为 $P' = v'_0 v'_1 \dots v'_l$, 其中 $v'_n = v_n (p \leq n \leq l)$ 且 v'_0, v'_p 可能不相邻. 那么 $u(P[v_0, v_p]) = u(P[v'_0, v'_p])$, 而且 $v'_0 v'_{l-1} \notin E(G)$, 因而 $d(v'_0, v'_{l-1}) = 2$. 由条件 D 及路 P' 的最长性易得 $N(v'_0) \subseteq \{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\}$, 且由 l, i 的取法知 $v'_0 v'_j \notin E(G) (i < j < l)$, 因而 $N(v'_0) \subseteq \{v'_1, v'_2, \dots, v'_i\} \cup \{v'_l, v'_{l+1}, \dots, v'_p\}$. 又由断言 1, $N(v'_{l-1}) \subseteq \{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\}$.

考虑下列子集

$$X = \{v'_{j-1} \mid 1 \leq j \leq i, v'_j \in N(v'_0)\}$$

$$Y = \{v'_{j+1} \mid l \leq j \leq p, v'_j \in N(v'_0)\}$$

$$Z = \{v'_j \mid 1 \leq j \leq p, v'_j \in N(v'_{l-1})\}$$

显然 $X \cap Y = \emptyset$. 可以证明如下两个断言 (证明略).

断言 2 $X \cap Z = \emptyset$.

断言 3 $Y \cap Z = \emptyset$.

断言 4 设 $l \leq k \leq r \leq p$, $v'_k \in N(v'_0) \cap N(v'_{l-1})$, 且对任意的 $v'_i \in V(P[v'_k, v'_r])$ 有 $v'_i \in N(v'_0)$, 但 $v'_{r+1} \notin N(v'_0)$, 则 (a) $v'_{k+1}, \dots, v'_{r+1} \notin N(v'_{l-1})$; (b) 若 $k < r$, 则不存在 $k \leq n \leq r - 1$ 使得 $u(v'_0 v'_n) \neq u(v'_n v'_{n+1})$; (c) $u(P[v'_k, v'_r]) = \sum \{u(v'_0 v'_n) \mid k \leq n \leq r\}$.

证 (a) 由断言 3 知显然成立.

(b) 若不然, 设 j 是满足上述结论的最小的 n . 记 $u(v'_0v'_j), u(v'_jv'_{j+1}), u(v'_0v'_{j+1})$ 分别为 w_1, w_2, w_3 . 下面分两种情形证明 (b).

情形 1 $j \neq k$. 由 j 的取法 $u(v'_nv'_{n+1}) = u(v'_0v'_n) = w_1, n = k, \dots, j-1$. 对路 $v'_{l-1}v'_kv'_0$ 用 D_1 得 $u(v'_{l-1}v'_k) = u(v'_0v'_k) = w_1$. 对路 $v'_{j-1}v'_jv'_{j+1}$ 用 D_1, D_2 得 $v'_{j-1}v'_{j+1} \in E(G)$, 其权不等于 w_1 ; 对路 $v'_{j-2}v'_{j-1}v'_{j+1}$ 用 D_1, D_2 得 $v'_{j-2}v'_{j+1} \in E(G)$, 其权不等于 w_1 ; ... 对路 $v'_kv'_{k+1}v'_{j+1}$ 用 D_1, D_2 得 $v'_kv'_{j+1} \in E(G)$, 其权不等于 w_1 ; 对路 $v'_{l-1}v'_kv'_{j+1}$ 用 D_1, D_2 得 $v'_{l-1}v'_{j+1} \in E(G)$ 与 (a) 矛盾. 此时 (b) 成立.

情形 2 $j = k$. 此时 $u(v'_0v'_k), u(v'_kv'_{k+1}), u(v'_0v'_{k+1})$ 分别为 w_1, w_2, w_3 . 由 (a) 知 $v'_{l-1}v'_{k+1} \notin E(G)$, 对路 $v'_{l-1}v'_kv'_{k+1}$ 用 D_1 得 $u(v'_{l-1}v'_k) = u(v'_kv'_{k+1}) = w_2$. 对路 $v'_0v'_kv'_{l-1}$ 用 D_1, D_2 得 $v'_0v'_{l-1} \in E(G)$, 矛盾. 此时 (b) 成立. (b) 证毕.

由 (b) 得 $u(v'_0v'_k) = u(v'_kv'_{k+1}) = u(v'_0v'_{k+1}) = u(v'_{k+1}v'_{k+2}) = u(v'_0v'_{k+2}) = \dots = u(v'_0v'_{r-1}) = u(v'_{r-1}v'_r) = u(v'_0v'_r) = w_1$. 而 $v'_{r+1} \notin N(v'_0)$, 对路 $v'_0v'_rv'_{r+1}$ 用 D_1 得 $u(v'_rv'_{r+1}) = u(v'_0v'_r) = w_1$. 因而 $u(P[v'_k, v'_{r+1}]) = \sum \{u(v'_nv'_{n+1}) | k \leq n \leq r\} = \sum \{u(v'_0v'_n) | k \leq n \leq r\}$. 证毕.

下面完成引理 4 的证明. 设 $I_k = P[v'_k, v'_{r+1}]$ 其中 $l \leq k \leq r \leq p, v'_k \in N(v'_0) \cap N(v'_{l-1})$, 且对任意的 $v'_i \in P[v'_k, v'_r]$ 有 $v'_i \in N(v'_0)$ 但 $v'_{r+1} \notin N(v'_0)$.

$$J_k = P[v'_k, v'_{r+1}] - \{v'_k, v'_{r+1}\}; J = \bigcup J_k; I = \bigcup I_k$$

$$\text{由断言 4 中的 (c) 得} \quad u(I) = \sum \{u(v'_0v'_n) | v'_n \in N(I) \cap N(v'_0)\} \quad (1)$$

由断言 2 得

$$\begin{aligned} u(P[v'_0, v'_p] \setminus J) &= \sum \{u(v'_{n-1}v'_n) | 1 \leq n \leq p\} - u(I) \geq \\ &\sum \{u(v'_{n-1}v'_n) | v'_n \in N(v'_0) \setminus N(I)\} + \sum \{u(v'_nv'_{n+1}) | v'_n \in N(v'_{l-1}), \\ &1 \leq n \leq l-1\} + u(v'_{l-1}v'_l) + \sum \{u(v'_{n-1}v'_n) | v'_n \in N(v'_{l-1}), l+1 \leq n \leq p\} \end{aligned} \quad (2)$$

对 $v'_n \in N(v'_0)$, 由于路 $v'_{n-1}\overline{P}v'_0v'_nP'v'_l$ 是过 z 的又一最长路, 由路 P' 的最重性, 得

$$u(v'_{n-1}v'_n) \geq u(v'_0v'_n) \quad (3)$$

同理对 $v'_n \in N(v'_{l-1})$, 当 $1 \leq n \leq l-1$ 时, 有

$$u(v'_nv'_{n+1}) \geq u(v'_{l-1}v'_n) \quad (4)$$

当 $l+1 \leq n \leq p$ 时, 有

$$u(v'_{n-1}v'_n) \geq u(v'_{l-1}v'_n) \quad (5)$$

情形 1 $v'_0v'_p \notin E(G)$.

由式 (1)~(5) 得

$$\begin{aligned} u(P[v'_0, v'_p]) &= u(P[v'_0, v'_p] \setminus J) + u(I) \geq \\ &\sum \{u(v'_0v'_n) | v'_n \in N(v'_0) \setminus N(I)\} + \sum \{u(v'_{l-1}v'_n) | v'_n \in N(v'_{l-1})\} + \\ &\{u(v'_0v'_n) | v'_n \in N(I) \cap N(v'_0)\} = \\ &\sum \{u(v'_0v'_n) | v'_n \in N(v'_0)\} + \sum \{u(v'_{l-1}v'_n) | v'_n \in N(v'_{l-1})\} = u(v'_0) + u(v'_{l-1}) \geq m \end{aligned}$$

令 $C = v_0Pv_pv_0$ 因 $u(P[v'_0, v'_p]) = u(P[v'_0, v'_p])$ 故

$$u(C) = u(P[v'_0, v'_p]) + u(v_0v_p) = u(P[v'_0, v'_p]) + u(v_0v_p) \geq u(P[v'_0, v'_p]) \geq m$$

引理 4 成立.

情形 2 $v'_0v'_p \in E(G)$. 此时令 $C = v'_0Pv'_pv'_0$.

情形 2.1 存在 k 使得 $v'_p \in I_k$, 则 $I_k = P[v'_k, v'_{p+1}]$, $u(v'_pv'_{p+1}) = u(v'_0v'_p)$. 此时

$$\begin{aligned} u(C) &= u(P[v'_0, v'_p]) + u(v'_0v'_p) = [u(P[v'_0, v'_p] \setminus J) + u(I) - u(v'_pv'_{p+1})] + u(v'_0v'_p) = \\ &u(P[v'_0, v'_p] \setminus J) + u(I) - u(v'_0v'_p) + u(v'_0v'_p) \geq \sum \{u(v'_0v'_n) | v'_n \in N(v'_0)\} + \\ &\sum \{u(v'_{l-1}v'_n) | v'_n \in N(v'_{l-1})\} \geq u(v'_0) + u(v'_{l-1}) \geq m \end{aligned}$$

引理 4 成立.

情形 2.2 不存在 k 使得 $v'_p \in I_k$, 则有

$$u(C) = u(P[v'_0, v'_p]) + u(v'_0 v'_p) \geq u(P[v'_0, v'_p]) = u(P[v'_0, v'_p] \setminus J) + u(I) \geq \sum \{u(v'_0 v'_n) | v'_n \in N(v'_0)\} + \sum \{u(v'_{l-1} v'_n) | v'_n \in N(v'_{l-1})\} \geq u(v'_0) + u(v'_{l-1}) \geq m$$

引理4成立.

2 定理1的证明

设 G 是满足定理1条件的赋权图. 若 G 的连通度 $k=2$, 由引理2知结论成立. 因而设 G 是3-连通图, 且图 G 没有 Hamilton 圈. 令 $\Psi = \{P | P \text{ 是 } G \text{ 中通过给定点 } V(P_i) \cap V(C_1) = \{x_i\} (i=1, 2, 3) \text{ 的一条最重最长路}\}$. 在 Ψ 中任取 $P = v_0 v_1 \dots v_l$. 显然 $N(v_0), N(v_l) \subseteq V(P)$, 且 $v_0 v_l \notin E(G)$. 令 $p = \max\{i | v_i \in N(v_0)\}, q = \min\{i | v_i \in N(v_l)\}$. 这样对 Ψ 中每条路可得相应的 p 及 q , 下面分两种情形证明定理1.

情形1 存在 Ψ 中的某条路 P , 使得 $z \in V(P[v_0, v_p])$.

选择 P 使得在 P 包含 z 且在其权重不变的条件下 p 最大. 由引理4, 存在以 $V(P[v_0, v_p])$ 为顶点的圈, 且其权重大于或等于 m , 定理1成立.

情形2 对于 Ψ 中的每一条路 P , 使得 $z \notin V(P[v_0, v_p])$.

此时也可以假设 $z \notin V(P[v_q, v_l])$. 若 $z \notin V(P[v_q, v_l])$, 用路 $v_l v_{l-1} \dots v_0$ 替代路 P . 假设 $z = v_s$, 故对每一条路 P , 都有 $p < q$, 且 $p < s < q$. 选择 P 使其在权重不变的条件下使 $p - q$ 最大化. 由引理4存在以 $V(P[v_0, v_p])$ 为顶点的圈, 且其权重大于或等于 m , 设此圈为 C_1 . 存在以 $V(P[v_q, v_l])$ 为顶点的圈, 且其权重 $\geq m$, 设此圈为 C_2 . 因 G 是3-连通的, 所以存在3条互不相交的路 P_1, P_2, P_3 连通 C_1 与 C_2 . 设 $V(P_i) \cap V(C_1) = \{x_i\} (i=1, 2, 3), V(P_i) \cap V(C_2) = \{y_i\}$. 则 $P_i = P[x_i, y_i] (i=1, 2, 3)$. 构造一条连接 C_1, C_2 且过 v_s 的路 Q , 它至少和 P_1, P_2, P_3 之一是顶点不交的. 令

$$U = V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) \quad p' = \max\{k | k \leq s, v_k \in U\} \quad q' = \min\{k | k \geq s, v_k \in U\}$$

可以假设 $V(v_p, v_s) \cap U \neq \emptyset$ 且 $V(v_s, v_q) \cap U \neq \emptyset$ (若 $V(v_p, v_q) \cap U = \emptyset$, Q 取 $P[v_p, v_q]$. 若 $v_{p'} \in V(P_i)$ 且 $V(v_s, v_q) \cap U = \emptyset$, 取 $Q = x_i P_i v_p P v_q$). 假设 $v_{p'} \in V(P_i), v_{q'} \in V(P_j)$, 取 $Q = x_i P_i v_p P v_q P_j y_j$, 则 Q 连接 C_1, C_2 且过 v_s . 对某个 $l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$, P_l 与 Q 顶点不相交, 而 C_h 包含了一条连通 $V(C_h) \cap V(Q)$ 与 $V(C_h) \cap V(P_l)$ 其权重大于或等于 $m/2$ 的路 ($h=1, 2$). 故可得过 v_s 权重大于 m 的圈. 定理1证毕.

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macmillan, 1976. 1—21.
- [2] BONDY J A, FAN G. Optimal paths and cycles in Weighted Graphs[J]. Ann Discrete Math, 1989, 41: 53—69.
- [3] BONDY J A, FAN G. Cycles in weighted graphs[J]. Combinatoric, 1991, 11: 191—205.
- [4] IVANČO J. The weight of a graph[J]. Ann Discrete Math, 1992, 51: 113—116.
- [5] HARANT J, VOIGT M, JENDROL S. On weights of induced paths and cycles in claw-free and $k_{1,r}$ -free graphs[J]. Journal of Geom Theory, 2001, 3: 132—143.
- [6] ZHANG S, LI X. Long path and cycles in weighted graphs[J]. Pure and Applied Graphs, 1999, 15(4): 46—51.
- [7] ZHANG S, LI X, HAJO B. Heavy paths and cycles in weighted graphs[J]. Discrete Math, 2000, 233: 327—336.
- [8] ENOMOTO H. Long paths and large cycles in finite graphs[J]. Journal of Graphs Theory, 1984, 8: 287—301.

Large cycles passing through a specified vertex in weighted graphs

BIAN Qiu-xiang¹, SUN Zhi-ren²

- (1. College of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhengjiang 212003, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Under the assumption that G is a 2-connected non-Hamilton weighted graph satisfying conditions D_1 and D_2 , a new conclusion is verified: if G satisfies $d^w(x) + d^w(y) \geq m (xy \notin E(G), x \neq y)$, through each vertex of graph G , there exist cycles with the weight equal to or greater than m . The conclusion extends Enomoto's theorem for the unweighted graphs to the weighted graphs.

Key words weighted graph; weighted degree; Hamilton cycle