

Cauchy 方程组极小范数最小二乘解的快速算法

仝秋娟¹ 陆 全² 李雪峰¹

(1. 西安邮电学院应用数理系 陕西 西安 710061 ; 2. 西北工业大学应用数学系 陕西 西安 710072)

摘要 对于秩为 n 的 $m \times n$ 阶 Cauchy 矩阵 C ,通过构造特殊分块矩阵并研究其逆矩阵的三角分解 ,进而间接地得到了线性方程组 $Cx = b$ 的极小范数最小二乘解的显式表达式及其快速算法 ,所需运算量为 $O(mn) + O(n^2)$,而通常构造法方程组的方法所需运算量为 $O(mn^2) + O(n^3)$,用正交化法虽然避免了构造法方程组 ,但所需的运算量更大些 .

关键词 :Cauchy 矩阵 ;极小范数最小二乘解 ;三角分解 ;快速算法

中图分类号 :O151.21 ;O241.6 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2005)06-0725-04

Cauchy 矩阵具有很长的研究历史 .Heinig 等^[1]首先给出了 Cauchy 矩阵逆的公式及算法 ,后来 Gohberg 等^[2~6]对此做了更深入的研究 ,文献 7~10 又研究了它的行列式、逆和分解等 .1997 年 ,Heinig 等^[11]研究了 Cauchy 型矩阵 .Cauchy 矩阵一个重要的方面是和有理插值有着密切的联系 .一个带定极点特征的有理插值问题往往可以转化为求解 Cauchy 方程组的问题^[12] .Cauchy 矩阵还具有计算优势 ,它在行列置换下是不变的 ,从而旋转法可以应用于 Cauchy 方程组 .Cauchy 矩阵的逆仍然是 Cauchy 矩阵 .一个 Cauchy 方程组的解可以用 $O(n \ln^2 n)$ 步求出^[13] ,这也是相当快的 .另外 ,许多特殊矩阵 ,如 Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵、Toeplitz + Hankel 矩阵等也可以转化为 Cauchy 矩阵^[5 ,14 ,15 ,16] .但求以 $m \times n$ 阶 Cauchy 矩阵为系数阵的线性方程组极小范数最小二乘解的研究结果笔者尚未见报 ,而最小二乘问题在应用数学、计算数学、物理、测绘、数理统计、数学规划、系统工程、控制论、经济与生物工程等领域中有着广泛的应用^[17] .因此 ,研究 Cauchy 方程组的快速算法具有重要的理论意义和实际意义 .

1 基本结论

形如 $C = (c_{ij})_{m \times n} = \left(\frac{1}{\alpha_i - \beta_j} \right)_{i,j=1}^{m,n}$ 的矩阵 C 称为 $m \times n$ 阶 Cauchy 矩阵 .它满足关系式 $\tilde{D}C - CD = pq^T$,

其中 $\tilde{D} = \text{diag}(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_m)$, $D = \text{diag}(\beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_n)$, $p = (1 , 1 , \dots , 1)_m^T$, $q = (1 , 1 , \dots , 1)_n^T$.

设 $m \times n$ 阶 Cauchy 矩阵 C 的秩为 n .构造 $m + n$ 阶矩阵

$$M = \begin{bmatrix} -I_m & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}$$
 (1)

利用分块矩阵的求逆公式得

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha (C^T C)^{-1} C^T - I_m & \alpha (C^T C)^{-1} \\ (C^T C)^{-1} C^T & (C^T C)^{-1} \end{bmatrix}$$
 (2)

如果可以求得式(1)中的矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} 的三角分解

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -I_m & U_1 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_m & \\ & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ U_1^T & U_2^T \end{bmatrix}$$
 (3)

式中 : U_2 ——上三角矩阵 ; D_1 ——对角矩阵 .则由(2)和(3)得 $(C^T C)^{-1} C^T = U_2 D_1 U_1^T$,从而 Cauchy 方程组 $Cx = b$ 的极小范数最小二乘解为 $x_0 = (C^T C)^{-1} C^T b = U_2 D_1 U_1^T b$.

收稿日期 :2005-03-25
基金项目 :陕西省自然科学基金资助项目(2004CS110002)
作者简介 :仝秋娟(1977—) ,女 ,陕西户县人 ,助教 ,硕士研究生 ,主要从事矩阵理论及快速算法研究 .

引理 1^[18] 设 n 阶矩阵 $S = (s_{ij})_{n \times n}$ 的顺序主子阵 $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均可逆, 给定线性方程组 $Sx = b$, 其中 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$. 记 $b_i = (b_1, b_2, \dots, b_i)^T$, 而 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ii})^T$, $u_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ii})^T$ 分别是线性方程组 $S_i x_i = b_i$, $S_i u_i = e_i^{(i)}$ 的解向量, 则 $x_i = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_i u_i$, 其中 $\sigma_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} x_{i-1, j}$.

引理 2^[18] 设 n 阶对称矩阵 $S = (s_{ij})_{n \times n}$ 的顺序主子阵 $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均可逆, 又设 $S_i u_i = e_i^{(i)}$ 的解向量为 $u_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ii})^T$, 则 $S^{-1} = \begin{bmatrix} S_{i-1}^{-1} & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} + u_i \lambda_i u_i^T$, 其中 $\lambda_i = \frac{1}{u_{ii}}$.

2 求解 Cauchy 方程组极小范数最小二乘解的快速算法

由定义知, 分块矩阵 M 满足

$$\begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D \end{bmatrix} M - M \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0_n \end{bmatrix} [\mathbf{0}_m^T \quad q^T] - \begin{bmatrix} 0_m \\ q \end{bmatrix} [p^T \quad 0_n^T] \quad (4)$$

设矩阵 M 的顺序主子阵 $M_i (i = 1, 2, \dots, m+n)$ 均可逆, 则当 $i > m$ 时, 由式(4)知

$$\begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D_{i-m} \end{bmatrix} M_i - M_i \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D_{i-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0_{i-m} \end{bmatrix} [\mathbf{0}_m^T \quad q_{i-m}^T] - \begin{bmatrix} 0_m \\ q_{i-m} \end{bmatrix} [p^T \quad 0_{i-m}^T] \quad (5)$$

设线性方程组 $M_i g_i = \begin{bmatrix} p \\ 0_{i-m} \end{bmatrix}$, $M_i h_i = \begin{bmatrix} 0_m \\ q_{i-m} \end{bmatrix} (i = m, m+1, \dots, m+n)$ 的解向量分别为 $g_i = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{ii})^T$, $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ii})^T$. 由 $M_m = -I_m$ 知 $g_m = -p$, $h_m = 0_m$. 又由引理 1 得

$$g_i = \begin{bmatrix} g_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_i u_i \quad h_i = \begin{bmatrix} h_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_i u_i \quad (6)$$

其中 $\sigma_i = -\sum_{k=1}^m c_{i-m, k} g_{i-1, k}$, $\tau_i = 1 - \sum_{k=1}^m c_{i-m, k} h_{i-1, k}$, $u_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{ii})^T$ 为 $M_i u_i = e_i^{(i)}$ 的解向量, 式(5)

两端分别左乘、右乘 M_i^{-1} , 得 $M_i^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D_{i-m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D_{i-m} \end{bmatrix} M_i^{-1} = g_i h_i^T - h_i g_i^T$, 再右乘 $e_i^{(i)}$, 得 $\beta_{i-m} u_i - \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D_{i-m} \end{bmatrix} u_i = h_{ii} g_i - g_{ii} h_i$, 将式(6)代入, 得 $\beta_{i-m} u_i - \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ D_{i-m} \end{bmatrix} u_i = u_{ii} \left[\tau_i \begin{bmatrix} g_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \sigma_i \begin{bmatrix} h_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right]$. 从而

$$u_{ki} = \begin{cases} \frac{u_{ii}(\tau_i g_{i-1, k} - \sigma_i h_{i-1, k})}{\beta_{i-m} - \alpha_k} & (k = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{u_{ii}(\tau_i g_{i-1, k} - \sigma_i h_{i-1, k})}{\beta_{i-m} - \beta_{k-m}} & (k = m+1, m+2, \dots, i-1) \end{cases} \quad (7)$$

取 $M_i u_i = e_i^{(i)}$ 的第 i 个分量, 即 $\sum_{k=1}^m c_{i-m, k} u_{ki} = 1$, 将式(7)代入, 得

$$u_{ii} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \frac{c_{i-m, k}}{\beta_{i-m} - \alpha_k} (\tau_i g_{i-1, k} - \sigma_i h_{i-1, k})} \quad (8)$$

由式(6)~(8)可得求解 Cauchy 方程组 $Cx = b$ 的极小范数最小二乘解的快速算法.

算法 (求 Cauchy 方程组 $Cx = b$ 的极小范数最小二乘解):

第一步: 求 $(C^T C)^{-1} C^T = U_2 D_1 U_1^T$ 的元素.

$$g_m = -p, h_m = 0_m$$

对于 $i = m+1, m+2, \dots, m+n$, 有

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -\sum_{k=1}^m c_{i-m, k} g_{i-1, k} & \tau_i &= 1 - \sum_{k=1}^m c_{i-m, k} h_{i-1, k} \\ t_{ik} &= \tau_i g_{i-1, k} - \sigma_i h_{i-1, k} & (k &= 1, 2, \dots, i-1) \\ \lambda_i &= \sum_{k=1}^m \frac{c_{i-m, k}}{\beta_{i-m} - \alpha_k} t_{ik} & u_{ii} &= \frac{1}{\lambda_i} \end{aligned}$$

$$u_{ki} = \frac{u_{ii}}{\beta_{i-m} - \alpha_k} t_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$
$$u_{ki} = \frac{u_{ii}}{\beta_{i-m} - \beta_{k-m}} t_{ik} \quad (k = m+1, m+2, \dots, i-1)$$
$$g_i = \begin{bmatrix} g_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_i u_i \quad h_i = \begin{bmatrix} h_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_i u_i$$

第二步:求 $Cx = b$ 的极小范数最小二乘解 $x_0 = U_2 D_1 U_1^T b$ 其中

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_{m+1,m+1} & \cdots & u_{m+1,m+n} \\ & \ddots & \\ & & u_{m+n,m+n} \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{m+n} \end{bmatrix} \quad U_1^T = \begin{bmatrix} u_{1,m+1} & \cdots & u_{m,m+1} \\ & & \\ u_{1,m+n} & \cdots & u_{m,m+n} \end{bmatrix}$$

该算法需进行 $8mn + 2n^2 - 4m - 9n + 3$ 次乘除运算, $6mn + n^2 - 4m - 4n + 5$ 次加减运算, 计算复杂度为 $O(mn) + O(n^2)$, 而用通常方法求解的计算复杂度为 $O(mn^2) + O(n^3)$.

3 数值例子

分别运用本文给出的快速算法、正交化算法和解法方程组, 用 Matlab 语言编程计算 Cauchy 方程组 $Cx = b$ 的极小范数最小二乘解, 结果见表 1(误差用向量的 2-范数度量).

表 1 3 种算法的运算时间随矩阵阶数变化的情况

Table 1 Relation of time used and orders of matrix

矩阵阶数		快速算法		正交化算法		解法方程组	
m	n	误差	时间/s	误差	时间/s	误差	时间/s
1 000	10	3.832×10^{-13}	0.05	5.056×10^{-11}	0.66	5.465×10^{-7}	0.00
2 000	10	3.158×10^{-14}	0.11	2.442×10^{-12}	2.80	2.333×10^{-9}	0.06
3 000	10	1.160×10^{-15}	0.17	4.321×10^{-14}	5.55	9.512×10^{-12}	0.11
4 000	10	3.171×10^{-15}	0.22	4.678×10^{-14}	10.82	5.380×10^{-14}	0.17
5 000	10	7.167×10^{-15}	0.33	1.795×10^{-14}	14.94	3.368×10^{-13}	0.28

注: $C = (c_{ij})_{m \times n} = \left(\frac{1}{\alpha_i - \beta_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ 其中 $\alpha_i = \frac{i^2}{m+n}, \beta_j = \frac{1}{j+6} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$.

参考文献:

[1] HEINIG G, ROST K. Algebraic methods for toeplitz-like matrices and operators[M]. Boston : Birknauser ,1984. 74—80.

[2] GOHBERG I, KOLTRACHT I, LANCASTER P. Efficient solution of linear systems of equations with recursive structure[J]. Linear Algebra Appl ,1986 ,80 : 81—113.

[3] GOHBERG I, KAILATH T, KOLTRACHT I, et al. Linear complexity parallel algorithms for linear systems of equations[J]. Linear Algebra Appl ,1987 ,88—89 : 271—316.

[4] BOROS T, SAYED A, KAILATH T. Structured matrices and unconstrained rational interpolation problems[J]. Linear Algebra Appl , 1989 ,34 : 55—67.

[5] HEINIG G. Inversion of generalized Cauchy matrices and other classes of structures matrices in Linear Algebra for Signal Processing[J]. Math Appl ,1994 ,69 : 95—114.

[6] SAVED A H, KAILATH T, LEV-ARI H, et al. Recursive solutions of rational interpolation pronloms via fast matrix factorization[J]. Integral Equations Oper Theory ,1994 ,20 : 84—118.

[7] KNUTH D E. The art of computer programming[J]. Addison-Wesley Reading ,1972(1) : 37—44.

[8] MUIR T. A treatise of the theory of determinant[M]. New York : Dover ,1933. 89—96.

[9] SCHECHTER S. On the inversion of certain matrices[J]. Math Tables Aids Comput ,1959 ,13(6) : 73—77.

[10] VAVRIN Z. Confluent Cauchy and Cauchy-Vandermonde matrices[J]. Linear Algebra Appl ,1997 ,258 : 271—293.

[11] HEINIG G, SAKHNOVICH L A, TIDNIUK I F. Paired Cauchy Matrices[J]. Linear Algebra Appl ,1997 ,251 : 189—214.

[12] BALL J, GOHBERG I, RODMAN L. Interpolation of rational matrix functions[M]. Boston : Birkhauser ,1990. 23—31.

[13] FINCK T, HEINIG G, TOST K. An inversion formula and fast algorithms for Cauchy-Vandermonde matrices[J]. Linear Algebra Appl ,

1993, 196: 179—192.

- [14] GOHBERG I ,KAILATH I ,OLSHEVSKY V. Fast Gaussian elimination with partial pivoting for matrices with displacement structure[J]. Math Comp ,1995 ,64 : 1557—1576.
- [15] HENIG G. Inversion of Toeplitz Matrices via Generalized Cauchy Matrices and Rational Interpolation[J]. Akademie Verlag ,1994(2) : 707—711.
- [16] HEINIG G ,BOJANCZYK A. Transformation techniques for Toeplitz and Toeplitz-plus-Hankel structured matrices [J]. Linear Algebra Appl ,1997 ,254 : 193—226.
- [17] 刘钦圣. 线性最小二乘问题的某些进展 [J]. 数学的实践与认识 ,1991(4) : 49—56.
- [18] 徐仲 ,张凯院 ,陆全. Toeplitz 矩阵类的快速算法 [M]. 西安 :西北工业大学出版社 ,1999. 3—5 ,217—223.

Fast algorithm of minimal norm least square solution for Cauchy linear system

TONG Qiu-juan¹ , LU Quan² , LI Xue-feng¹

(1. Department of Applied Mathematics and Physics , Xi 'an University of
Post and Telecommunications , Xi 'an 710061 , China ;

2. Department of Applied Mathematics of Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China)

Abstract For the $m \times n$ Cauchy matrix C with full column rank , the explicit expression and the fast algorithm of the minimal norm least square solution to the linear system $Cx = b$ were indirectly obtained by construction of a special block matrix and study of the triangular decomposition of its inverse. The amount of computation by the method is $O(mn) + O(n^2)$, while the amount of computation is $O(mn^2) + O(n^3)$ by conventional method for construction of the normal equations. The amount of computation for the orthogonalization method is further increased , although it avoids the construction of the normal equations.

Key words Cauchy matrix ; minimal norm least square solution ; triangular decomposition ; fast algorithm