

基于随机微分方程的汇流计算方法

孙颖娜, 芮孝芳

(河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室、河海大学水资源环境学院, 江苏 南京 210098)

摘要 基于随机微分方程,建立了输入具有确定性特征、参数具有随机性特征的线性汇流模型,应用 Liouville 定理对该模型进行了求解,得到了出口断面出流过程的概率密度,并据此确定了出流过程的均值和方差.结果表明,线性汇流模型能够同时给出出流过程的均值及其对均值的离散程度.

关键词 随机微分方程; 汇流参数; 概率密度; 汇流模型

中图分类号: P333 文献标识码: A 文章编号: 1000-198X(2006)01-0028-04

现行的汇流计算方法大多基于确定性的汇流计算模型.事实上,模型参数受许多不确定性因素的影响,具有一定的随机性^[1-4].因此,一般的常微分方程难以满足对汇流系统进行随机性描述的要求,采用随机微分方程来描述汇流系统应更为合理.本文在文献[5]的基础上,探讨有确定性输入和模型参数具有随机性特征情况下的汇流计算方法.

1 汇流系统随机微分方程模型

1.1 基本方程

假设线性汇流系统由 n 个无旁侧入流的线性水库串联而成,每个线性水库的蓄量方程为

$$W(t) = kQ(t) \quad (1)$$

式中: $W(t)$ ——汇流系统的蓄量; $Q(t)$ ——汇流系统的输出; k ——线性水库的蓄量常数.

根据水量平衡原理连续演算至出口断面,则可以得到描述该线性汇流系统的 n 阶常系数线性微分方程式

$$Q(t) + nk \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{n(n-1)}{2!} k^2 \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} k^3 \frac{d^3 Q(t)}{dt^3} + \dots + k^n \frac{d^n Q(t)}{dt^n} = I(t) \quad (2)$$

式中 $I(t)$ 为汇流系统的输入项.

式(2)反映了一个确定性汇流系统的常微分方程.但实际上,由于许多不确定因素的影响,蓄量常数 k 具有一定的不确定性,因此将它视为随机变量或随机过程则更合理些.当 k 被视为随机变量时,式(2)就变成了随机常微分方程,其解 $Q(t)$ 是一个随机过程^[6].

1.2 随机微分方程的求解

本文就式(2)当 n 分别等于 1、2、3 的情况进行求解,即分别为 1 个、2 个、3 个线性水库串联的情况下求其出流过程的均值和方差.

1.2.1 1 个线性水库串联的情形

当 $n=1$ 时,式(2)变为

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \alpha[I(t) - Q(t)] \quad (3)$$

式中 α 为随机变量, $\alpha = 1/k$.

为了便于讨论,将与式(3)相对应的随机微分方程写成

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = f_1(Q(t), \alpha, t) \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases} \quad (4)$$

式中: A ——随机变量, $A = [\alpha]$; Q_0 ——随机初始条件.

式(4)是一个含有随机系数和随机初始条件的一阶随机常微分方程. 为了尽可能多地了解随机解过程 $Q(t)$ 的特性, 一般不求解过程本身而求解过程的某些性质(如均值和均方差等). 这样, 如果能够确定解过程 $Q(t)$ 满足的概率密度, 就能够得到需要的统计特性.

为了求解随机微分方程式(4)的概率统计特性, 可将其转化成为仅含随机初始条件的增广型方程

$$\dot{Z}(t) = G(Z(t), t) \quad (t \geq t_0, Z(t_0) = Z_0) \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} Z = [z_1 \quad z_2]^T = [Q(t) \quad A]^T = [Q(t) \quad \alpha]^T \\ G = [G_1 \quad G_2]^T = [f_1 \quad 0]^T \\ Z_0 = [Q_0 \quad A]^T = [Q_0 \quad \alpha]^T \end{cases} \quad (6)$$

经过式(5)与(6)的转换, 随机参数 A 的随机性通过初始条件引入, 即式(5)定义了一个仅含随机初始条件的随机微分方程. 因此, 可利用只有随机初始条件的随机微分方程的求解方法求解 $Z(t)$ 的统计特性, 进而不难得到 $Q(t)$ 的概率统计特性.

假设 $Q(t)$ 的均方解存在, 且它的一阶联合概率密度函数 $f(Z(t), t)$ 满足 Liouville 方程

$$\frac{\partial f(Z(t), t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m+n} \frac{\partial G_j f(Z(t), t)}{\partial z_j} = 0 \quad (7)$$

式中: m —— $Q(t)$ 的维数; n —— A 的维数; G_j ——函数矢量 G 的第 j 分量函数.

将式(6)代入式(7)就可得到 $Q(t)$ 与 A 的联合概率密度函数 $f(Q, t; \alpha)$ 满足的偏微分方程式

$$\frac{\partial f(Q, t; \alpha)}{\partial t} + f(Q, t; \alpha) \frac{\partial f_1}{\partial Q(t)} + f_1 \frac{\partial f(Q, t; \alpha)}{\partial Q(t)} = 0 \quad (8)$$

式中: $f_1 = \alpha(K(t) - Q(t))$; $f(Q, t; \alpha)$ ——联合概率密度函数, 其初始条件是 Q_0 和 A 的联合概率密度函数 $f(Q_0, A)$.

如果在出口断面计算起始时刻各随机变量相互独立, 则其初始条件为 $f(Q, t_0; \alpha) = f(Q_0, t_0) f(\alpha)$.

1.2.2 2 个线性水库串联的情形

当 $n = 2$ 时, 式(2)变为

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ(t)}{dt} + \alpha^2 Q(t) = \alpha^2 K(t) \quad (9)$$

设 $x_1(t) = Q(t)$, $x_2(t) = \dot{Q}(t)$, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} K(t) \quad (t \geq t_0, x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}) \quad (10)$$

将式(10)中的参数与初始条件视为随机变量, 则该方程为含有随机系数与随机初始条件的随机微分方程, 其一般形式为

$$\dot{X}(t) = f(X(t), A, t) \quad (t \geq t_0, X(t_0) = X_0) \quad (11)$$

$$X = [x_1 \quad x_2]^T \quad X_0 = [x_{10} \quad x_{20}]^T \quad A = [\alpha] \quad f = [f_1 \quad f_2]^T$$

式中: X ——二维矢量随机过程; X_0 ——随机初始条件.

与 $n = 1$ 的计算方法相同, 式(11)转化成仅含有随机初始条件的增广型方程, 其联合概率密度函数 $f(Q, \dot{Q}, t; \alpha)$ 满足偏微分方程式

$$\frac{\partial f(Q, \dot{Q}, t; \alpha)}{\partial t} - 2\alpha f(Q, \dot{Q}, t; \alpha) + \sum_{j=1}^2 f_j \left(\frac{\partial f(Q, \dot{Q}, t; \alpha)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (12)$$

假设起始时刻出口断面各随机变量独立, 则其初始条件为 $f(x_{10}, x_{20}, t; \alpha) = f(Q_0, t) f(\dot{Q}_0, t) f(\alpha)$.

1.2.3 3 个线性水库串联的情形

当 $n = 3$ 时, 设 $x_1(t) = Q(t)$, $x_2(t) = \dot{Q}(t)$, $x_3(t) = \ddot{Q}(t)$, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^3 \end{bmatrix} K(t) \quad (t \geq t_0, x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, x_3(t_0) = x_{30})$$

采用 $n=2$ 时的计算方法,则得到联合概率密度函数 $f(Q_0, \dot{Q}_0, \ddot{Q}_0, t; \alpha)$ 满足的偏微分方程

$$\frac{\partial f(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, t; \alpha)}{\partial t} - 3\alpha f(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, t; \alpha) + \sum_{j=1}^3 f_j \left(\frac{\partial f(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, t; \alpha)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (13)$$

假设起始时刻出口断面各随机变量相互独立,其初始条件为 $f_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \alpha; t) = f_0(Q_0, t) f_0(\dot{Q}_0, t) f_0(\ddot{Q}_0, t) f_0(\alpha)$.

式(8)(12)(13)的边界条件为

$$f(\pm \infty, A, t) = 0 \quad (14)$$

这一边界条件表明 $f(Q, t; A)$ 满足归一化条件

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(Q, t; A) dQ dA = 1 \quad (15)$$

将式(8)的解对 $A=[\alpha]$ 积分,可得到 $n=1$ 情况下 $(Q(t); t)$ 的概率密度函数

$$f(Q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(Q, t; A) dA \quad (16)$$

将式(12)(13)的解对 $A=[\alpha]$ 积分,可分别得到 $n=2$ 和 $n=3$ 情况下 $(Q(t), \dot{Q}(t))$ 和 $(Q(t), \dot{Q}(t), \ddot{Q}(t))$ 的联合概率密度函数

$$f(Q, \dot{Q}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(Q, \dot{Q}, t; A) dA \quad (17)$$

$$f(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, t; A) dA \quad (18)$$

对式(17)(18)进行积分,就可得到 (Q, t) 的边缘概率密度 $f(Q, t)$. 求得解过程 $Q(t)$ 的概率密度,则可得许多有用的统计特征量. 解过程的各阶统计矩可用下式进行求解:

$$E[Q^n(t)] = \int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} Q^n(t) f(Q, t) dQ \quad (19)$$

2 算 例

现通过具体算例来说明基于随机微分方程的流域汇流计算方法的适用性.

长江三峡地区沿渡河流域的流域面积为 601 km^2 . 选取该流域 1981~1987 年共 15 场暴雨洪水. 根据由霍顿(Horton)地貌参数计算 Nash 模型参数 n 的公式^[7]得该流域的 $n=3$. 计算时段取 $\Delta t=1 \text{ h}$.

假设初始流量为确定性量,且 $Q(t_0)=0$. 又假设模型参数 α 是一个服从截头尾正态分布的随机变量^[8],即

$$f(\alpha) = \frac{d}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha} \exp\left[-\frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{2\sigma_\alpha^2}\right] \quad (\alpha \in (0, 2\bar{\alpha})) \quad (20)$$

式中: $\bar{\alpha}$ —— α 的均值; σ_α —— α 均方差; d ——截断系数.

式(20)中的均值 $\bar{\alpha}$ 和均方差 σ_α 可用下式进行计算:

$$E[\alpha] = \bar{\alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{m} \quad (21)$$

$$\sigma[\alpha] = \sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{m-1}} \quad (22)$$

式中: α_i ——第 i 个样本洪水测得的蓄量系数; m ——样本洪水的总次数.

对于沿渡河流域,由式(21)(22)求得的 α 的均值和均方差分别为 0.3967 h^{-1} 和 0.0464 h^{-1} .

根据上述假定和给定的随机变量 α 的具体分布,可确定式(13)的初始条件. 本文采用有限差分法求解式(13). 在求得出口断面流量 $Q(t)$ 和参数 α 的联合概率密度后,对蓄量系数进一步积分就可得到出流过程的边缘概率密度,再利用式(19)就可得到出流过程的各阶统计矩,从而可得到出流过程的均值和方差. 由此求得的沿渡河流域 15 场洪水出流过程均值 $\bar{Q}(t)$ 和均方差 $\sigma_Q(t)$ 计算结果见表 1.

表 1 沿渡河流域出流过程的均值和均方差计算结果

Table 1 Mean value and variance of outflow process of Yanduhe Watershed				m ³ /s			
洪号	实测 洪峰	计算洪 峰均值	计算洪峰 均方差	洪号	实测 洪峰	计算洪 峰均值	计算洪峰 均方差
810625	1046	1027	59.75	840613	479	441	30.84
810714	540	548	50.32	840910	308	326	38.15
810812	552	560	42.51	850424	288	329	58.23
810824	448	458	41.02	850603	194	217	30.50
820821	489	508	26.77	850621	431	455	41.69
830909	799	826	50.47	860615	433	374	48.97
831005	435	494	45.10	870719	751	692	61.51
831018	260	267	30.23				

3 结 论

本文首先利用随机微分方程理论 ,建立了输入具有确定性特征、参数具有随机性特征的线性汇流模型 ,然后采用 Liouville 定理求解了相应的随机微分方程 ,得出了出口断面出流过程的概率密度 ,最后根据此概率密度确定了出流过程的均值和方差 .算例表明 ,本文所建立的线性汇流模型能够同时给出出流过程的均值及对均值的离散程度 .对洪水预报来说 ,该模型能同时给出预报值及相应的误差情况 .

参考文献 :

[1] KARLSSON M ,YAKOWITZ S. Rainfall-runoff forecasting methods : old and new[J]. Stoch Hydrol Hydraul ,1987 (1) 304-318.
[2] BODO B A ,UNNY T E. On the outputs of stochastisized Nash-Dooge linear reservoir cascades[G]/MACNEILL I B ,UMPHREY G J. Stochastic Hydrology .Dordrecht :Reidel Publ. Co. , 1987 :131-137.
[3] UNNY T E.Stochastic nature of outputs from coneptual reservoir model cascades[J].J Hydrol ,1984 ,68 :161-180.
[4] LIN Gwo-fong ,WANG Yu-ming. General stochastic instantaneous unit hydrograph[J]. J Hydrol , 1996 ,182 :227-238
[5] 孙颖娜 ,芮孝芳 .随机输入情况下汇流计算方法的探讨[J].水科学进展 ,2005 ,16(5) :661-665.
[6] 张炳根 ,赵玉芝 .科学与工程中的随机微分方程[M].北京 :海洋出版社 ,1980 :280-297.
[7] 芮孝芳 .利用地形地貌资料确定 Nash 模型参数的研究[J].水文 ,1999(3) :6-10.
[8] SOONG T T. Random differential equations in science and engineering[M]. New York :Academic Press , 1973 :327.

Confluence calculation method by use of stochastic differential equation

SUN Ying-na , RUI Xiao-fang

(State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering ,
College of Water Resources and Environment , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :A linear confluence model with deterministic input and stochastic parameter was built . The Liouville theorem was used to solve the model . The probability density of outflow process at outlets was obtained , and the mean value and variance of the outflow were further determined . Case study shows that the present model can obtain the mean value of outflow process and its discrete degree .

Key words :random differential equation ; parameter of confluence ; probability density ; confluence model