

集值映射的一个交定理及其应用

陆海曙¹,唐德善²

(1. 河海大学商学院,江苏 南京 210098;2. 河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 在集值映射的值为转移闭值这样一个比较弱的条件下,运用连续单位分解定理的技巧,在没有凸结构和线性结构的一般拓扑空间中证明了一个新的关于集值映射的非空交定理. 作为应用,在没有凸结构和线性结构的一般拓扑空间中得到一些新的 Ky Fan 型极大极小不等式.
关键词 一般拓扑空间 转移闭(开)值 极大极小不等式 集值映射
中图分类号 O177 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2006)01-0112-04

1 预备知识

集值映射的非空交定理在变分不等式理论和非线性分析的许多领域中都有着重要的应用,特别是在博弈论、数理经济、控制论和优化问题的解的存在性问题以及不动点理论等方面起着极为重要的作用. Lu 等^[1]在没有线性结构的 H -空间中得到一个关于集值映射的非空交定理,并运用该定理得到了许多 Ky Fan 型极大极小不等式.

本文的目的是在没有凸结构和线性结构的一般拓扑空间的框架下建立一个集值映射的非空交定理. 作为应用,在一般拓扑空间中得到了一些新的 Ky Fan 型极大极小不等式.

为方便起见,假设本文所涉及的拓扑空间都具有 Hausdorff 分离性质.

为得出本文的主要结果,需采用下面的记号、定义和引理.

设 X 是非空集合,用 2^X 表示 X 的所有子集簇,用 $\langle X \rangle$ 表示 X 的所有非空有限子集簇,用 $|A|$ 表示所有 $A \in \langle X \rangle$ 的基数. Δ_n 表示具有顶点 $\{e_0, \cdots, e_n\}$ 的 n -维标准单形,如果 J 是 $\{0, \cdots, n\}$ 的非空子集,那么用 $\Delta|_J|_{-1}$ 表示顶点集 $\{e_j : j \in J\}$ 的凸包.

如果 X 的所有简化 Čech 同调群 $H_p(X) = 0$ (p 为有理数),那么非空拓扑空间 X 称为是零调的. 特别地,任何非空可缩空间都是零调的,从而一个拓扑向量空间中的非空凸集或星形集也是零调的. 反之不一定成立.

设 X 和 Y 为拓扑空间, $T : X \rightarrow 2^Y$ 为集值映射,如果对任一开集 $G \subset Y$,集合 $\{x \in X : T(x) \subset G\}$ 为 X 中的开集,那么集值映射 $T : X \rightarrow 2^Y$ 称为是上半连续的. 容易说明^[2],如果 Y 为紧拓扑空间,且 T 的图像 $\{(x, y) \in X \times Y : y \in T(x)\}$ 在 $X \times Y$ 中是闭的,那么 $T : X \rightarrow 2^Y$ 是上半连续的.

定义 1^[3] 设 X 为非空集合, Y 为拓扑空间, $T : X \rightarrow 2^Y$ 为集值映射. 如果对任一 $x \in X$,当 $y \notin T(x)$ 时,存在 $x' \in X$ 使得 $y \notin \overline{T(x')}$,其中 $\overline{T(x')}$ 表示 $T(x')$ 在 Y 中的闭包,那么称 T 在 X 上具有转移闭值.

定义 2^[3] 设 X 为非空集合, Y 为拓扑空间, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 为一泛函. 对某些 $\lambda \in \mathbb{R}$,那么称 f 在 y 处 λ -转移下半连续. 如果对任意的 $x \in X, y \in Y$,当 $f(x, y) > \lambda$ 时,存在 $x' \in X$ 和 y 的邻域 $N(y)$,使得对任意 $z \in N(y), f(x', z) > \lambda$.

显然,若定义集值映射 $G : X \rightarrow 2^Y$ 如下:

$$\forall x \in X \quad G(x) = \{y \in Y : f(x, y) \leq \lambda\}$$

则 G 在 X 上具有转移闭值,当且仅当 $f(x, y)$ 在 y 处 λ -转移下半连续.

收稿日期 2005-04-18
基金项目 水利部科技创新基金资助项目(SCX2001-02) 江苏省教育厅高校科研经费资助项目(01KJD110003)
作者简介:陆海曙(1971—),男,江苏兴化人,博士研究生,主要从事博弈论及其应用研究.

引理 1^[4] 设 X 为紧拓扑空间, Δ_n 为 n -维标准单形, $\varphi: X \rightarrow \Delta_n$ 为连续映射, 又设集值映射 $T: \Delta_n \rightarrow 2^X$ 上半连续, 且具有非空紧零调值, 则存在一点 $\mu^* \in \Delta_n$, 使得 $\mu^* \in \varphi(T(\mu^*))$.

2 主要结果

定理 1 设 X 和 Y 为拓扑空间, M 和 N 为 $X \times Y$ 的子集, $C: X \rightarrow 2^Y$ 为集值映射, 且满足条件 (i) C 在 X 上具有转移闭值, (ii) $\forall y \in Y, \{x \in X: (x, y) \in N\} \subset C(y)$, (iii) $\forall A \in \langle Y \rangle$, 使得 $\forall x \in K, A \cap \{y \in Y: (x, y) \notin N\} \neq \emptyset$, 存在一个连续映射 $\varphi_A: \Delta_{|A|-1} \rightarrow Y$, 满足 $\forall x \in K, \varphi_A(\Delta_{|A \cap \{y \in Y: (x, y) \notin N\}|-1}) \subset \{y \in Y: (x, y) \notin M\}$, (iv) 假定存在 $P \subset M$ 以及紧子集 $K \subset X$, 使得 P 是 $X \times Y$ 中的闭集, 并且 $\forall y \in Y$, 集合 $\{x \in K: (x, y) \in P\}$ 是非空零调的, 则 $\bigcap_{y \in Y} C(y) \cap K \neq \emptyset$.

证明 首先证明对任何 $A \in \langle Y \rangle$, 有 $\bigcap_{y \in A} \overline{C(y)} \cap K \neq \emptyset$. 若不然, 则存在一个 $A = \{y_0, \dots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 使得 $\bigcap_{y \in A} \overline{C(y)} \cap K = \emptyset$, 从而有 $K \subset \bigcup_{y \in A} (X \setminus \overline{C(y)})$. 由于 $\forall y \in Y, X \setminus \overline{C(y)}$ 是 X 中的开集, 因此, 对应于 K 的有限开覆盖 $\{X \setminus \overline{C(y)}: y \in A\}$, 存在相应的单位分解 $\beta_0, \dots, \beta_n$, 即 $\beta_i (i = 0, \dots, n)$ 为 K 上的非负连续函数, 使得 β_i 在 $K \setminus (X \setminus \overline{C(y)})$ 上为零, 且 $\forall x \in K, \sum_{i=0}^n \beta_i(x) = 1$. 现定义连续映射 $g: K \rightarrow \Delta_n$ 如下:

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i(x) e_i \quad \forall x \in K$$

对于任意的 $i \in \{0, \dots, n\}$ 与 $x \in K$, 若 $\beta_i(x) > 0$, 则结合条件 (ii) 有

$$x \in X \setminus \overline{C(y_i)} \subset \{x \in X: (x, y_i) \notin N\} \quad (1)$$

$\forall x \in K$, 定义 $J(x) = \{i \in \{0, \dots, n\}: \beta_i(x) > 0\}$, $B(x) = \{y_i: i \in J(x)\}$. 由式 (1) 知 $\forall x \in K, \emptyset \neq B(x) \subset \{y \in Y: (x, y) \notin N\} \cap A$. 再由条件 (iii) 知存在一个连续映射 $\varphi: \Delta_n \rightarrow Y$, 使得 $\forall x \in K, \varphi(\Delta_{|B(x)|-1}) \subset \{y \in Y: (x, y) \notin M\}$. 由此可知, 复合映射 $f = \varphi \circ g: K \rightarrow Y$ 具有如下特性:

$$\forall x \in K \quad f(x) = \varphi(g(x)) \in \varphi(\Delta_{|B(x)|-1}) \subset \{y \in Y: (x, y) \notin M\} \quad (2)$$

另一方面, 定义集值映射 $G: Y \rightarrow 2^K$ 为 $\forall y \in Y, G(y) = \{x \in K: (x, y) \in P\}$. 由条件 (iv), $\forall y \in Y, G(y)$ 是非空零调的. 由于 P 是 $X \times Y$ 中的闭集, 不难看出 $G(y)$ 是 K 中的闭集, 且 G 的图像是 $Y \times K$ 中的闭集, 所以 G 是上半连续的. 因 φ 是连续的, 故由引理 1 可知, 存在 $p \in \Delta_n$, 使得 $p \in g(G(\varphi(p)))$. 设 $x_0 \in G(\varphi(p)) \subset K$, 使得 $p = g(x_0)$, 则有 $x_0 \in G(\varphi(g(x_0))) = G(f(x_0))$. 由 G 的定义知 $(x_0, f(x_0)) \in P \subset M$. 这与式 (2) 矛盾. 因此, 对任意 $A \in \langle Y \rangle, \bigcap_{y \in A} \overline{C(y)} \cap K \neq \emptyset$ 成立. 由于 $\forall y \in Y, \overline{C(y)} \cap K$ 为紧集 K 中的闭子集, 所以有 $\bigcap_{y \in Y} \overline{C(y)} \cap K \neq \emptyset$. 至此, 只需证明 $\bigcap_{y \in Y} \overline{C(y)} \cap K = \bigcap_{y \in Y} C(y) \cap K$ 即可. 显然, $\bigcap_{y \in Y} \overline{C(y)} \cap K \supset \bigcap_{y \in Y} C(y) \cap K$. 假设 $\bigcap_{y \in Y} \overline{C(y)} \cap K \subset \bigcap_{y \in Y} C(y) \cap K$ 不成立, 则存在 $x \in \bigcap_{y \in Y} \overline{C(y)} \cap K$ 和 $y \in Y$, 使得 $x \notin C(y) \cap K$. 由于 C 是转移闭的, 因此存在 $y' \in Y$, 使得 $x \notin \overline{C(y')} \cap K$. 这发生了矛盾. 因此, $\bigcap_{y \in Y} \overline{C(y)} \cap K = \bigcap_{y \in Y} C(y) \cap K \neq \emptyset$. 故定理得证.

注 1 定理 1 除了在证明方法上与文献 [1] 中的定理 2.1 不同外, 还从以下几个方面推广了文献 [1] 中的定理 2.1.

- Y 从 H -空间推广到没有凸结构和线性结构的一般拓扑空间;
- 集值映射 C 从具有闭值减弱为具有转移闭值;
- 容易验证文献 [1] 中定理 2.1 的条件 (ii) 是本文定理 1 条件 (iii) 的特例;
- 条件 $M \subset N$ 在本定理中被去掉.

现在来验证文献 [1] 中定理 2.1 的条件 (ii) 是上述定理 1 的条件 (iii) 的特例 (有关 H -空间以及 H -凸的定义参见文献 [5]), 也就是要验证由文献 [1] 中定理 2.1 的条件 (ii) 可以推得本文定理 1 的条件 (iii). 文献 [1] 中定理 2.1 的条件 (ii) 为: $\forall x \in K$, 集合 $\{y \in Y: (x, y) \notin M\}$ 为 H -凸, 且 $M \subset N$.

现假设 $\forall A \in \langle Y \rangle$, 使得 $\forall x \in K, A \cap \{y \in Y: (x, y) \notin N\} \neq \emptyset$, 则 $A \cap \{y \in Y: (x, y) \notin M\} \neq \emptyset$. 由

文献[5]中的定理 2.1 可知存在一个连续映射 $\varphi_A: \Delta|_A|_{-1} \rightarrow Y$, 使得对任何 $B \subset A$, 有 $\varphi_A(\Delta|_B|_{-1}) \subset \Gamma(B)$. 从而可知 $\forall x \in K, \varphi_A(\Delta|_{A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin N\}}|_{-1}) \subset \Gamma(A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin N\}) \subset \Gamma(A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin M\})$. 由于 $\forall x \in K$, 集合 $\{y \in Y: (x,y) \notin M\}$ 为 H -凸, 且 $A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin M\} \in \langle \{y \in Y: (x,y) \in M\} \rangle$, 则由 H -凸的定义可知

$$\forall x \in K \quad \varphi_A(\Delta|_{A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin N\}}|_{-1}) \subset \{y \in Y: (x,y) \notin M\}$$

由此可知文献[1]中定理 2.1 的条件(ii)确实是上述定理 1 的条件(iii)的特例.

定理 2 设 X 和 Y 为拓扑空间, K 为 X 的紧子集, 又设泛函 $e, f, g, h: X \times Y \rightarrow R \cup \{+\infty, -\infty\}$ 满足条件(i) $\forall (x,y) \in X \times Y, e(x,y) \leq f(x,y), g(x,y) \leq h(x,y)$, (ii) e 在 x 处 0-转移下半连续, (iii) $\forall A \in \langle Y \rangle$, 使得 $\forall x \in K, A \cap \{y \in Y: f(x,y) > 0\} \neq \emptyset$, 存在一个连续映射 $\varphi_A: \Delta|_A|_{-1} \rightarrow Y$, 满足 $\forall x \in K, \varphi_A(\Delta|_{A \cap \{y \in Y: f(x,y) > 0\}}|_{-1}) \subset \{y \in Y: g(x,y) > 0\}$, (iv) 集合 $\{(x,y) \in X \times Y: h(x,y) \leq 0\}$ 是 $X \times Y$ 中的闭集, (v) $\forall y \in Y, \{x \in K: h(x,y) \leq 0\}$ 是非空零调的, 则存在 $x_0 \in K$, 使得 $e(x_0, y) \leq 0, \forall y \in Y$.

证明 定义集值映射 $C: Y \rightarrow 2^X$ 如下:

$$C(y) = \{x \in X: e(x,y) \leq 0\} \quad \forall y \in Y$$

设

$$M = \{(x,y) \in X \times Y: g(x,y) \leq 0\}$$

$$N = \{(x,y) \in X \times Y: f(x,y) \leq 0\}$$

$$P = \{(x,y) \in X \times Y: h(x,y) \leq 0\}$$

由条件(i)知 $\forall y \in Y, \{x \in X: (x,y) \in N\} \subset C(y)$, 满足定理 1 的条件(ii). 由条件(ii)可知 C 是转移闭值的, 满足定理 1 的条件(i). 显然, 由条件(iv), P 是 $X \times Y$ 中的闭集. 由条件(iii)可知 $\forall A \in \langle Y \rangle$, 使得 $\forall x \in K, A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin N\} \neq \emptyset$, 存在连续映射 $\varphi_A: \Delta|_A|_{-1} \rightarrow Y$, 满足 $\forall x \in K, \varphi_A(\Delta|_{A \cap \{y \in Y: (x,y) \notin N\}}|_{-1}) \subset \{y \in Y: (x,y) \notin M\}$. 由条件(v), $\forall y \in Y$, 集合 $\{x \in K: (x,y) \in P\}$ 是非空零调的. 于是定理 1 的条件全部满足, 从而有 $\bigcap_{y \in Y} C(y) \cap K \neq \emptyset$, 即存在 $x_0 \in K$, 使得 $e(x_0, y) \leq 0, \forall y \in Y$. 故定理得证.

推论 1 设 X 和 Y 为拓扑空间, K 为 X 的紧子集, 又设泛函 $e, f, g, h: X \times Y \rightarrow R \cup \{+\infty, -\infty\}$ 满足条件(i) $\forall (x,y) \in X \times Y, e(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$, (ii) e 在 x 处 0-转移下半连续, (iii) $\forall A \in \langle Y \rangle$, 使得 $\forall x \in K, A \cap \{y \in Y: g(x,y) > 0\} \neq \emptyset$, 存在一个连续映射 $\varphi_A: \Delta|_A|_{-1} \rightarrow Y$, 满足 $\forall x \in K, \varphi_A(\Delta|_{A \cap \{y \in Y: g(x,y) > 0\}}|_{-1}) \subset \{y \in Y: g(x,y) > 0\}$, (iv) 集合 $\{(x,y) \in X \times Y: h(x,y) \leq 0\}$ 是 $X \times Y$ 中的闭集, (v) $\forall y \in Y, \{x \in K: h(x,y) \leq 0\}$ 是非空零调的, 则存在 $x_0 \in K$, 使得 $e(x_0, y) \leq 0, \forall y \in Y$.

推论 2 设 X 和 Y 为拓扑空间, K 为 X 的紧子集, 又设泛函 $f, g, h: X \times Y \rightarrow R \cup \{+\infty, -\infty\}$ 满足条件(i) $\forall (x,y) \in X \times Y, g(x,y) \leq h(x,y)$, (ii) f 在 x 处 0-转移下半连续, (iii) $\forall A \in \langle Y \rangle$, 使得 $\forall x \in K, A \cap \{y \in Y: f(x,y) > 0\} \neq \emptyset$, 存在一个连续映射 $\varphi_A: \Delta|_A|_{-1} \rightarrow Y$, 满足 $\forall x \in K, \varphi_A(\Delta|_{A \cap \{y \in Y: f(x,y) > 0\}}|_{-1}) \subset \{y \in Y: g(x,y) > 0\}$, (iv) 集合 $\{(x,y) \in X \times Y: h(x,y) \leq 0\}$ 是 $X \times Y$ 中的闭集, (v) $\forall y \in Y, \{x \in K: h(x,y) \leq 0\}$ 是非空零调的, 则存在 $x_0 \in K$, 使得 $f(x_0, y) \leq 0, \forall y \in Y$.

参考文献:

- [1] LU Hai-shu, ZHANG Ji-hui. Minimax inequalities in the spaces without linear structure[J]. Taiwanese J Math, 2004, 8(4): 703-712.
- [2] AUBIN J P, EKELAND I. Nonlinear functional analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984: 110-111.
- [3] TIAN Guo-qiang. Generalization of the FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality, with applications to maximal elements, price equilibrium, and complementarity[J]. Math Anal Appl, 1992, 170(2): 457-471.
- [4] SHIOJI N. A further generalization of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 117: 187-195.
- [5] TARAFDAR E. Fixed-point theorems in H -spaces and equilibrium point of abstract economies[J]. Austral Math Soc Series A, 1992, 53:

252-260.

An intersection theorem for set-valued mapping and its application

LU Hai-shu¹, TANG De-shan²

(1. Business School, Hohai University, Nanjing 210098, China ;

2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract Under the weak condition that the set-valued mapping is transfer closed-valued, a new nonempty intersection theorem for set-valued mapping is proved in general topological spaces without linear and convex structure by use of the technique of continuous unity partition. As an application, some new minimax inequalities of Ky Fan type are obtained in general topological spaces without linear and convex structure.

Key words general topological space ; transfer closed (open)-valued ; minimax inequality ; set-valued mapping

《水利经济》征订启事

双月刊 6.00 元/期 全年 36.00 元 邮发代号 28-252 单月 30 日出版

《水利经济》是中国水利经济研究会会刊,由中国水利经济研究会与河海大学共同主办,是理论与实践相结合、普及与提高相结合的综合性学术刊物.《水利经济》1983 年创刊,是中国科技核心期刊、全国水利系统优秀期刊、全国农业系统优秀期刊,是全国唯一的水利经济研究方面的专业性期刊.经国家科委批准,国内外公开发行.

主要刊登内容 水电技术与经济,生态与环境经济方面的科技政策、综合述评、研究探讨、工程技术及措施、成果推广及经验交流、专题讲座、国外动态、书刊评介、科技简讯 水资源管理、评价、优化配置,城乡供水与安全,农业经济,农业灌溉与节水技术等方面的文章.2006 年本刊将重点关注与水电有关的科学研究,生态建设领域中的水资源可持续发展研究,新增设供水安全、水土保持、城乡供水、环境治理等栏目.

主要读者对象 与水电技术与经济、生态、环境、农业有关的工程技术、科研人员、管理干部以及大专院校师生.

订阅办法 读者可通过邮局订阅,也可直接汇款至编辑部订阅(全年另加邮寄费 6.00 元).

编辑部地址 210098 南京西康路 1 号 河海大学

联系电话 :(025)83786350 联系人 汪海

传真 :(025)83787381 E-mail :jj@hhu.edu.cn