

泊松方程非等间距有限差分的数值求解方法

曹卫东,陆昌根,钱建华

(河海大学环境科学与工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 采用 3 阶精度中心差分格式对 Dirichlet 边界条件下的二维泊松方程进行离散,近边界网格点处采用 2 阶精度差分格式进行离散,利用超松弛迭代进行矩阵求解.数值计算结果表明,该有限差分方法具有收敛速度快、精度高的特点,可推广应用于非等间距网格下其他类型偏微分方程的数值求解.

关键词 泊松方程 非等间距 差分格式

中图分类号 O35 文献标识码 A 文章编号 1000-1980(2006)02-0123-04

泊松方程是一类应用非常广泛的椭圆型偏微分方程,在流体动力学、渗流理论、电磁学、传热学、结构力学等学科的基础理论研究中占有重要的地位.由于只有少量的泊松方程有解析解,因此寻求该类方程高精度的数值解成为理论研究的重要内容^[1-2].

文献[1~3]介绍的二维泊松方程的主要求解方法有:(a)等间距网格 5 点或 9 点中心差分方法,该算法简单,但在网格较粗时精度不高;(b)9 点紧致格式,可达到 4 阶或 6 阶精度,但要求同一坐标方向网格等距或所有坐标方向网格等距.在等间距条件下,为了达到理想的计算精度并取得指定点的函数值,必须将网格细分,这将导致计算量大大增加.在流体力学边界层理论与湍流理论的研究中,为了确定近壁面的高精度流动特性,在微小的边界层厚度内往往布置大量的网格点,且网格间距变化剧烈^[4-5],只有在流场的中心区域网格间距才可适当放宽,因此建立包括压力泊松方程在内的变间距网格高精度离散方法非常必要^[6].Gamet 等^[7]采用非等间距网格和紧致格式,成功地对 Navier-Stokes 方程进行了数值计算.本文应用 Gamet 的方法对泊松方程进行离散,并通过数值算例验证了本文格式的精度.

1 非等间距网格的二阶微分差分格式

在矩形区域 $\bar{D}$ ($0 < x < a, 0 < y < b$) 内考虑泊松问题的 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) & (x,y) \in D \\ u(x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \partial D \end{cases} \quad (1)$$

如图 1 所示, x 方向网格编号为 $0 < i < m$, 每一点坐标值为 $x(i)$, y 方向网格编号为 $0 < j < n$, 每一点坐标值为 $y(j)$.

x 方向网格间距: $h_x(i) = x(i) - x(i-1)$

y 方向网格间距: $h_y(j) = y(j) - y(j-1)$

x 或 y 方向的空间步长可以任意加密和变化. 图中

$u(i,j)$ 表示编号为 (i,j) 网格点的待求函数值. $i=1, i=m-1, j=1, j=n-1$ 为近边界点; $i=0, i=m, j=0, j=n$ 为边界点, 其余为内点. Dirichlet 边值问题中边界点函数值已知.

1.1 泊松方程在内点的离散

若 x 方向网格编号为 $2 \leq i \leq m-2$. 令 u_{xx} 满足

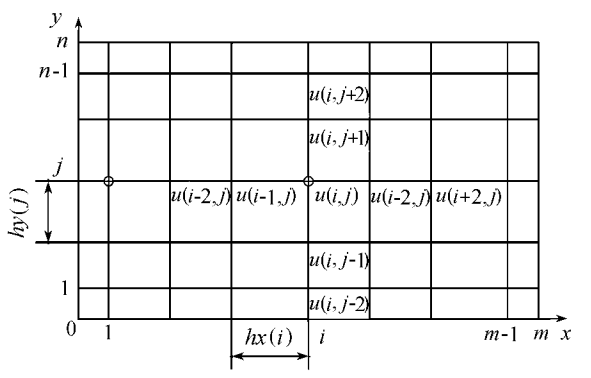


图 1 网格点布置
Fig.1 Layout of grids

$$u_{xx} = A_{i-2}u(i-2, j) + A_{i-1}u(i-1, j) + A_i u(i, j) + A_{i+1}u(i+1, j) + A_{i+2}u(i+2, j) \quad (2)$$

式中 $A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$ 与 i 点附近的网格间距 $hx(i-1), hx(i), hx(i+1), hx(i+2)$ 有关. 将式(2)中的 $u(i-2, j), u(i-1, j), u(i+1, j), u(i+2, j)$ 在 i 点作 x 方向 Taylor 展开, 比较同阶导数项前的系数可得如下关系式:

$$\begin{cases} A_{i-2} + A_{i-1} + A_i + A_{i+1} + A_{i+2} = 0 \\ -(hx_{i-1} + hx_i)A_{i-2} - hx_i A_{i-1} + hx_{i+1}A_{i+1} + (hx_{i+1} + hx_{i+2})A_{i+2} = 0 \\ (hx_{i-1} + hx_i)^2 A_{i-2} + hx_i^2 A_{i-1} + hx_{i+1}^2 A_{i+1} + (hx_{i+1} + hx_{i+2})^2 A_{i+2} = 2 \\ -(hx_{i-1} + hx_i)^3 A_{i-2} - hx_i^3 A_{i-1} + hx_{i+1}^3 A_{i+1} + (hx_{i+1} + hx_{i+2})^3 A_{i+2} = 0 \\ (hx_{i-1} + hx_i)^4 A_{i-2} + hx_i^4 A_{i-1} + hx_{i+1}^4 A_{i+1} + (hx_{i+1} + hx_{i+2})^4 A_{i+2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

若系数 $A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$ 满足式(3), 分析式(2)两端 Taylor 展开式余项的系数可知, u_{xx} 具有 3 阶精度.

若 y 方向网格编号为 $2 \leq j \leq n-2$, 同样令 u_{yy} 满足

$$u_{yy} = B_{j-2}u(i, j-2) + B_{j-1}u(i, j-1) + B_j u(i, j) + B_{j+1}u(i, j+1) + B_{j+2}u(i, j+2) \quad (4)$$

$B_{j-2}, B_{j-1}, B_j, B_{j+1}, B_{j+2}$ 仅仅与 j 点的网格间距 $hy(j-1), hy(j), hy(j+1), hy(j+2)$ 有关. 将式(4)中的 $u(i, j-2), u(i, j-1), u(i, j+1), u(i, j+2)$ 在 j 点作 y 方向 Taylor 展开, 比较同阶导数项前的系数可得如下关系式:

$$\begin{cases} B_{j-2} + B_{j-1} + B_j + B_{j+1} + B_{j+2} = 0 \\ -(hy_{j-1} + hy_j)B_{j-2} - hy_j B_{j-1} + hy_{j+1}B_{j+1} + (hy_{j+1} + hy_{j+2})B_{j+2} = 0 \\ (hy_{j-1} + hy_j)^2 B_{j-2} + hy_j^2 B_{j-1} + hy_{j+1}^2 B_{j+1} + (hy_{j+1} + hy_{j+2})^2 B_{j+2} = 2 \\ -(hy_{j-1} + hy_j)^3 B_{j-2} - hy_j^3 B_{j-1} + hy_{j+1}^3 B_{j+1} + (hy_{j+1} + hy_{j+2})^3 B_{j+2} = 0 \\ (hy_{j-1} + hy_j)^4 B_{j-2} + hy_j^4 B_{j-1} + hy_{j+1}^4 B_{j+1} + (hy_{j+1} + hy_{j+2})^4 B_{j+2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

若系数 $B_{j-2}, B_{j-1}, B_j, B_{j+1}, B_{j+2}$ 满足式(5), 分析式(4)两端 Taylor 展开式余项的系数可知, u_{yy} 具有 3 阶精度.

将式(2)与式(4)相加, 即可获得式(1)在内点的离散方法:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = A_{i-2}u(i-2, j) + A_{i-1}u(i-1, j) + (A_i + B_j)u(i, j) + A_{i+1}u(i+1, j) + A_{i+2}u(i+2, j) + B_{j-2}u(i, j-2) + B_{j-1}u(i, j-1) + B_{j+1}u(i, j+1) + B_{j+2}u(i, j+2) \quad (6)$$

1.2 泊松方程在近边界点的离散

若 x 方向网格编号为 $i=1$, 令 u_{xx} 满足

$$u_{xx} = A_{i-1}u(i-1, j) + A_i u(i, j) + A_{i+1}u(i+1, j) + A_{i+2}u(i+2, j) \quad (7)$$

若 x 方向网格编号为 $i=m-1$, 令 u_{xx} 满足

$$u_{xx} = A_{i-2}u(i-2, j) + A_{i-1}u(i-1, j) + A_i u(i, j) + A_{i+1}u(i+1, j) \quad (8)$$

若 y 方向网格编号为 $j=1$, 令 u_{yy} 满足

$$u_{yy} = B_{j-1}u(i, j-1) + B_j u(i, j) + B_{j+1}u(i, j+1) + B_{j+2}u(i, j+2) \quad (9)$$

y 方向网格编号为 $j=n-1$, 令 u_{yy} 满足

$$u_{yy} = B_{j-2}u(i, j-2) + B_{j-1}u(i, j-1) + B_j u(i, j) + B_{j+1}u(i, j+1) \quad (10)$$

各点系数 $A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, B_{j-2}, B_{j-1}, B_j, B_{j+1}, B_{j+2}$ 仅仅与其周围的网格间距有关, 求解步骤与内点方法类似. 泊松方程在近边界点的离散方程依据点的位置, 选取式(7)或式(8)与式(9)或式(10)组合相加.

2 数值计算方法

将近边界点离散方程式(7)~(10)与内点离散方程式(6)代入泊松方程, 共获得 $(m-1)(n-1)$ 个方程, 含 $(m-1)(n-1)$ 个未知数. 将边界上的已知条件 $u(0, j), u(m, j), u(i, 0), u(i, m)$ 与 $(m-1)(n-1)$ 个方程合并组成 $m \times n$ 个线性方程组, 记为

$$A_{mn \times mn} \mathbf{u}_{mn \times 1} = \mathbf{b}_{mn \times 1}$$

A_{mn} 为 $mn \times mn$ 阶稀疏系数矩阵,内点有 9 个系数,边界点仅仅在对角线上有唯一系数 $1.0,(1,1),(1,n-1),(m-1,1),(m-1,n-1)$ 4 点有 7 个系数,其余近边界点均为 8 个系数. $u_{mn \times 1}$ 为泊松方程在各点待求的数值解,为 $mn \times 1$ 阶列矩阵. $b_{mn \times 1}$ 为 $mn \times 1$ 阶列矩阵,边界点的值由式(1)的边界条件给定,近边界点和内点的值由泊松方程的右项给出.系数矩阵为稀疏矩阵,采用行迭代与超松弛相结合的方法可以大大减少计算量.计算用 Fortran 90 语言编程,在双精度制下进行.

3 数值算例

为了检验非等间距差分格式数值计算泊松方程的精度和速度,在正方形区域内考查精确解问题:

$$u(x,y) = e^{x+y} \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

本文算例对边界附近点网格加密,网格的坐标值以函数值形式给出.以 x 方向为例:

$$x(i) = 0.5 \left[1 - \tanh \frac{a(m/2 - i)}{m - 1} \right] / \tanh \frac{a}{2} \quad (0 \leq i \leq m/2)$$
$$x(i) = 0.5 \left[1 + \tanh \frac{a(i - m/2)}{m - 1} \right] / \tanh \frac{a}{2} \quad (m/2 \leq i \leq m)$$

调整 a 值可以使得近壁面附近点的间距发生变化. a 值越大,近壁面附近点的间距越小,若 x 方向取 90 个网格, $a = 8$; y 方向取 70 个网格, $a = 2$. 非等间距网格与等间距网格间距分布的对比如图 2 所示.

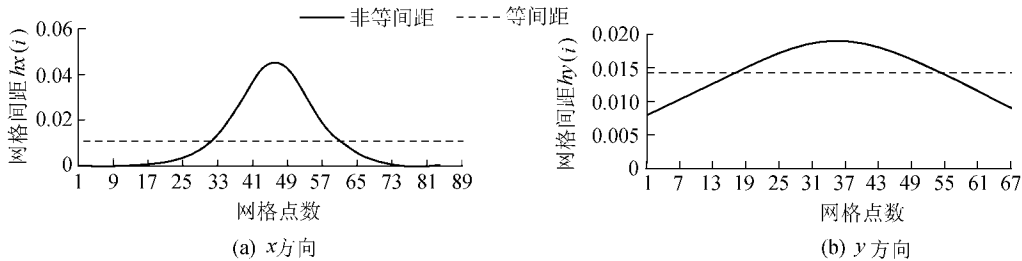


图 2 网格间距

Fig.2 Space between grids

近边界点和内网格点初始函数值统一赋为 0,通过调整松弛因子,可获得较少的迭代次数和较小的误差值.当所有线性方程组等号两端差值的绝对值小于某一较小的正数时,迭代停止,在非等间距网格和等间距网格中分别计算.两种格式的迭代次数与计算所耗机时的比较见表 1.其中,泊松方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ 在等距网格中的 9 点 4 阶精度离散格式表达为^[8]

$$\{0[u(i+1,j) + u(i-1,j)] - 2[u(i,j+1) + u(i,j-1)] + u(i+1,j+1) + u(i+1,j-1) + u(i-1,j+1) + u(i-1,j-1) - 20u(i,j)]\} / \Delta x + \{0[u(i+1,j) + u(i-1,j)] - 2[u(i,j+1) + u(i,j-1)] + u(i+1,j+1) + u(i+1,j-1) + u(i-1,j+1) + u(i-1,j-1) - 20u(i,j)]\} / \Delta y = 8f(i,j) + f(i-1,j) + f(i+1,j) + f(i,j-1) + f(i,j+1) \quad (11)$$

在相同的误差控制条件下,本文算例在变间距网格中所需的迭代次数较少.若 x/y 取表 1 的等距网格,离散格式取式(11),迭代次数控制为 88,123,123,113,得到的数值解与理论解的最大误差分别为 $5.44 \times 10^{-3}, 4.9 \times 10^{-2}, 0.37, 1.36$,明显大于非等间距的误差值.

4 结 论

本文采用变间距网格,对二维泊松方程的第一类边值问题进行差分求解,内点为 3 阶精度格式,近边界点为 2 阶精度格式.

a. 泊松方程在变间距网格中的收敛速度快于等间距网格,并且随着网格数的增加,变间距网格的收敛

表 1 $u(x,y) = e^{x+y}$ 的计算精度比较

Table 1 Comparison of accuracy of different schemes

x/y (网格数)	控制精度	迭代次数	松弛因子	计算时间/s
50/50	5×10^{-5}	非等间距 88	1.72	0.73
		等间距 155	1.88	1.20
70/70	10^{-5}	非等间距 123	1.71	1.27
		等间距 217	1.91	3.46
90/90	5×10^{-6}	非等间距 123	1.80	2.35
		等间距 285	1.93	6.41
120/120	2×10^{-5}	非等间距 113	1.76	5.49
		等间距 370	1.95	17.01

速度优势更加明显. 如果总网格数很少, 变间距网格会导致某些区域网格间距增加. 为了获得给定的计算精度, 迭代次数会少量增加.

b. 变间距网格在近边界处网格密度较大, 弥补了近边界处离散格式精度降低的缺陷, 整个区域计算精度依然很高.

c. 本文介绍的差分格式网格可以在整个计算区域任意加密. 在相同的误差控制条件下, 在函数值变化剧烈的地方采用变间距网格加密可使得数值计算精度提高, 迭代次数和计算时间减少.

d. 与等间距网格相比, 变间距网格可以以更少的网格获得指定点的函数值. 泊松方程非等间距有限差分法可推广应用于泊松方程第二类边值问题或其他类型微分方程的求解.

参考文献：

[1] 田振夫. 求解泊松方程的紧致高阶差分方法[J]. 西北大学学报, 1996(2) :109-114.
[2] 田振夫. 数值求解泊松方程的四阶紧致差分方法[J]. 宁夏大学学报, 1995(3) :22-24.
[3] MANOHOR R, STEPHENSON M. High order difference schemes for linear partial differential equations [J]. J Sci Stat Comp, 1984(5) :69-77.
[4] 李新亮. 槽道湍流的直接数值模拟[D]. 北京 中国科学院力学所, 2000.
[5] LI Xin-liang, MA Yan-wen, FU De-xun. High efficient method for incompressible N-S equations and analysis of two dimensional turbulence channel flow[J]. Acta Mechanica Sinica, 2001(5) :577-587.
[6] SANJIVA K L. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103 :16-42.
[7] GAMET L, DUCROS F, NICOUUD F, et al. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, 29 :159-191.
[8] 周恒, 陆昌根. 湍流边界层近壁区单个相干结构的模拟[J]. 中国科学 A 辑, 1999(4) :366-372.

Numerical solution of Poisson equation with non-uniform mesh finite difference scheme

CAO Wei-dong, LU Chang-gen, QIAN Jian-hua

(College of Environmental Science and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The third-order accuracy center finite difference scheme was introduced to solve two-dimensional Poisson equations with Dirichlet boundary conditions, and the second-order accuracy finite difference scheme was applied to mesh discretization near boundaries. With the over-relaxation matrix iteration algorithm, the numerical solution was finally achieved. The present finite difference scheme is verified to be effective and accurate enough through case study, and it can be applied to solving other differential equations with non-uniform meshes.

Key words Poisson equation ; non-uniform ; difference scheme