

均匀设计在结构优化中的应用初探

张 慧

(河海大学土木工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :在有约束的结构优化设计问题中引进均匀设计方法 ,并对其进行一定的改进 ,提出了余表的构想 ,同时用均匀设计的思想优化体积约束条件下受均布横向荷载作用的变厚度方板的刚度问题 .结果表明 ,与同条件下的均厚度板相比 ,受均布横向荷载作用的四边简支方板最大挠度值降低了 44.66% ,四边固支方板最大挠度值降低了 75.63% .因此均匀设计的思想可用于结构优化设计 .

关键词 均匀设计 ;余表 ;结构优化 ;挠度

中图分类号 :O224 文献标识码 :A 文章编号 :1000-198X(2006)02-0197-03

在有约束的优化设计问题中 ,当目标函数与约束可用设计变量的显式表达时 ,理论上可用解析方法求梯度 ,从而可采用各种与梯度有关的算法 ;反之 ,只能采用直接法求解^[1-4] .然而当设计变量太多时 ,用直接法计算极为复杂 ,甚至无法进行优化 ,因此需要寻求一种新的算法 .由方开泰等^[5]提出的均匀设计方法仅考虑试验点在试验范围内的均匀散布 ,采用该方法安排试验时 ,每个因素的每个水平仅做一次试验 ,解决了用最短时间和最少次数达到完整全面的试验效果这一难题 .本文将均匀设计原理和方法引入到结构优化设计问题中 ,取得了较好的效果 .

1 均匀设计方法介绍

均匀设计是通过均匀设计表进行试验设计的 ,均匀设计表记为 $U_L(L^n)$.其中 : U 表示均匀设计 ; L 表示试验数 ,也表示每个因素的水平数 ,即表的行数 ; n 代表列数 .本文采用的均匀设计表是用“好格子点法”构造的 .生成过程为 :给定试验数 L ,寻找 $h(h < L)$,使 L 与 h 互质 , h 的个数决定表的列数 .表中第 i 行 j 列元素记为 u_{ij} ,其递推公式为

$$u_{1j} = h_j$$
$$u_{(i+1)j} = \begin{cases} u_{ij} + h_j & u_{ij} + h_j \leq L \\ u_{ij} + h_j - L & u_{ij} + h_j > L \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, L)$$

(1)

若在某项试验中 ,要求各因素相加为一定值 ,则需进行配方试验 .根据文献^[5]的均匀设计思想来进行配方设计 ,生成配方均匀设计表 ,记为 $UM_L(L^n)$,其中 UM 表示配方均匀设计 .具体生成方法如下 :

- a. 给定 L ,生成均匀设计表 $U_L(L^n)$,取表中前 $n-1$ 列元素组成 $U_L(L^{n-1})$.其中元素记为 q_{ki} .
- b. 计算 $C_{ki} = \frac{2q_{ki} - 1}{2L} \quad (k = 1, 2, \dots, L)$
- c. 计算

$$\begin{cases} x_{ki} = n(1 - C_{ki}^{\frac{1}{n-i}}) \prod_{j=1}^{i-1} C_{kj}^{\frac{1}{n-j}} \\ x_{kn} = n \prod_{j=1}^{n-1} C_{kj}^{\frac{1}{n-j}} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; k = 1, 2, \dots, L)$$

(2)

则 $\{x_{ki}\}$ 就给出了对应 L, n 的配方均匀设计表 .

2 均匀设计在结构优化问题中的应用

均匀设计表中各项皆为正整数且各因素间相互独立 ,将其应用于一般的结构优化设计问题是不合适的 .

但表中每行元素可代表 n 维设计空间的一个点,它给出了各个设计变量间的比例关系.

通常,优化需要三要素:初始迭代点、步长和搜索方向.将均匀设计引入结构优化问题中,旨在借助均匀设计的思想寻找搜索方向.由此提出余表的构想如下:

给定 L ,生成配方均匀设计表 $UM_L(L^n)$,其中每行元素之和都等于 n .本文将每个元素减 1 后得到的表称为余表,记为 $UN_L(L^n)$,其中元素记为 η_{ij} .显然

$$\sum_{j=1}^n \eta_{ij} = 0$$

(3)

余表的意义在于:给定一组变量 $u_1, u_2, \dots, u_n$,满足 $\sum_{i=1}^n u_i = n$.将其与余表某行元素的倍数(ϵ)叠加后得到一组值 $u_{i1}^*, \dots, u_{in}^*$,满足 $\sum_{j=1}^n u_{ij}^* = \sum_{j=1}^n (u_i + \epsilon \eta_{ij}) = n$.由此可见, ϵ 相当于迭代步长,余表则表示迭代方向.

3 算例分析

本文所举算例是体积约束条件下受均布横向荷载作用的变厚度方板的刚度优化问题.采用有限元混合法^[6-8]求得整体混合代数方程组.由于本文仅考虑刚度优化问题,即极小化最大挠度值,因此代数方程组可简化为

$$f(w, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$t = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T$$

(4)

式中: k ——角节点个数; n ——板划分的网格数; t_i ——第 i 个单元板的量纲一的厚度值(变厚度板与同体积同中截面积均板相应厚度的比值).于是,板刚度优化问题可表述为

$$\begin{cases} \min(\max w_i) \\ \text{s.t. } f(w, t) = 0 \\ \sum_1^n t_j = n \\ t_j > 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(5)

取弹性模量 E 的量纲值为 1,泊松比 $\mu = 0.3$,均布荷载 q_0 量纲一的量值为 1.

具体优化过程如下.

- a. 以 $t_0 = [1, 1, \dots, 1]^T$ 为初始迭代点,以余表为迭代方向,得到一组较理想的厚度分布.
- b. 为寻求更优的初始迭代点,将均匀设计表 $U_L(L^n)$ 中的每个元素 u_{ij} 乘以某因子后满足约束条件,生成的表记为 $UU_L(L^n)$.具体生成过程为:对于第 i 行

$$t_{ij} = u_{ij} \cdot n / \sum_{j=1}^n u_{ij}$$

从 $UU_L(L^n)$ 中找出分布规律与上相似的一组厚度值,以其为新的初始迭代点,重复 a 过程.若无与上相似的,则结束计算.

3.1 四边简支方板

取 $1/4$ 板,网格划分 4×4 .给定 $L = 17$,则 $n = 16$,即 $1/4$ 板划分的网格数.按本文优化过程得到的优化结果为 $w_{\max} = 0.02488$,在简支方板中心 B 处. $1/4$ 板厚度分布见图 1.板最薄处在简支边的角点 D 附近,最厚处在板中心 B 处.同样条件下的均匀厚度方板在网格 4×4 ($1/4$ 板)时 $w_{0\max} = 0.04496$.优化后最大挠度下降了 44.66%.

3.2 四边固支方板

取 $1/4$ 板,网格划分 4×4 .优化过程同前.优化结果为: $w_{\max} = 0.003616$,在方板中心 B 处. $1/4$ 板厚度分布见图 2.板最薄处在固支边的角点 D 附近,最厚处在板固定边中点 $A(C)$ 附近.

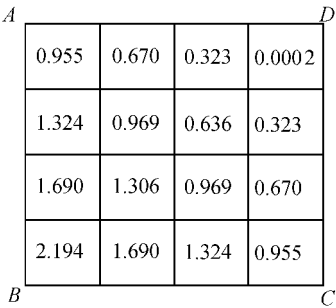


图 1 $1/4$ 简支板厚度分布
Fig.1 Thickness distribution of simply supported quarter plate

同样条件下的均匀厚度方板在网格 4×4 (1/4 板) 时 $w_{0\max} = 0.01484$. 优化后最大挠度下降了 75.63% .

4 结 语

本文的 2 个算例表明 ,将均匀设计法用于结构优化问题是可行的. 余表的提出理论上是从 n 维灵敏度空间中以均匀设计的思想寻求最佳的搜索方向 ,剔除灵敏度中非重要因素 ,这与优化中的灵敏度分析方法是一致的. 但将均匀设计引入到结构优化问题只是一种尝试 ,仍有很多问题需做进一步探讨 ,如迭代步长如何最佳确定 ,高维度与低维度的设计表之间是否可以沟通等.

参考文献 :

[1] 陈宝林 . 最优化理论与算法 [M]. 北京 : 清华大学出版社 ,2002 :334-420 .
[2] 唐焕文 ,秦学志 . 最优化方法 [M]. 大连 : 大连理工大学出版社 ,1994 :149-201 .
[3] CHENG K T ,OLHOFF N . An investigation concerning optimal design of solid elastic plate[J]. International Journal of Solids and Structures ,1981 ,17 :305-323 .
[4] ESCHENAUER H A ,OLHOFF N . Toplogy optimization of continuum structures—A review[J]. Applied Mechanics Review ,2001 ,54(4) : 331-390 .
[5] 方开泰 . 均匀设计与均匀设计表 [M]. 北京 : 科学出版社 ,1994 :35-55 .
[6] 徐芝纶 . 弹性力学 (下册) [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,1992 :1-55 .
[7] 程昌钧 ,朱媛媛 . 弹性力学 [M]. 上海 : 上海大学出版社 ,1996 :150-220 .
[8] 朱伯芳 . 有限单元法原理及应用 [M]. 北京 : 中国水利水电出版社 ,1998 :55-75 .

Application of uniform design to optimal design of structures

ZHANG Hui

(College of Civil Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :The uniform design method in modern experimental design was introduced and improved , and the concept of residual table was defined. As a case study , the optimal stiffness design for the square plate with varied thickness under uniformly distributed transversal loads and constrained volume condition was carried out by use of the method. The result shows that , compared with the plate with uniform thickness under the same condition , the maximum deflection of the simply supported square plate decreases by 44.66% , and the maximum deflection of the fixed square plate decreases by 75.63% . Therefore , the uniform design method can be used for optimal design of structures .

Key words :uniform design ; residual table ; structure optimization ; deflection

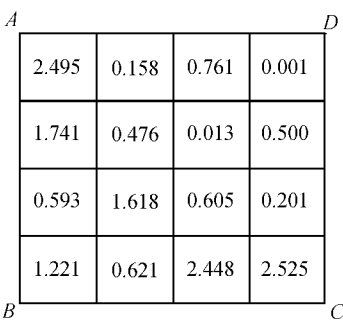


图 2 1/4 固支板厚度分布
Fig.2 Thickness distribution of fixed quarter plate