

无限长空间板在轴对称荷载作用下的位移和应力分析

黄耀英¹,王润富²,吴中如¹

(1.河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098 ;2.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 运用汉克尔变换导出了无限长空间板在轴对称荷载作用下的位移和应力解答,并通过与完全位移约束下的有限深地基模型、半无限大弹性地基模型和文克尔地基模型进行比较,分析它们之间的异同.分析结果表明:当 $H \rightarrow \infty$ 时,无论底部是光滑刚性支承约束还是完全位移约束,在法向集中力作用下得到的水平面位移结果与半空间体的布希涅斯克位移解答在水平面上的位移是一致的;当 $H \rightarrow 0$ 时,底部是光滑刚性支承约束与底部是完全位移约束取极限得到的文克勒地基基床系数是不同的.

关键词 无限长空间板;有限深地基;光滑刚性支承;汉克尔变换;轴对称
中图分类号 :O343 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2006)03-0285-05

众所周知,基础梁、板的理论分析是土木工程和水利工程中十分重要的问题.目前在实际工程中,当采用弹性地基梁、板法进行基础受力和变形分析时,通常采用如下 3 种地基模型:(a)文克尔地基模型;(b)半无限大弹性地基模型;(c)有限深弹性地基模型.

自 20 世纪 60 年代初期,徐芝纶教授在国内首先提出有限深地基模型以来,广大科技工作者对该模型进行了大量的研究工作,并取得了很多研究成果^[1-3].在此基础上,本文运用汉克尔变换导出了无限长空间板在轴对称荷载作用下的位移和应力解答,并通过与完全位移约束的有限深地基模型、半无限大弹性地基模型和文克尔地基模型进行比较,分析它们之间的异同.

1 轴对称荷载作用下位移和应力

设有无限长空间板作用轴对称荷载,由文献[4]知,由于该无限长空间板的荷载对称,那么在中面 $z = 0$ 处没有剪应力和垂直位移,因此,空间板的上半部分相当于支承在刚性光滑基础上的一个弹性层,如图 1 所示.下面对光滑刚性支承的有限深地基在轴对称荷载作用下的应力和位移进行分析.

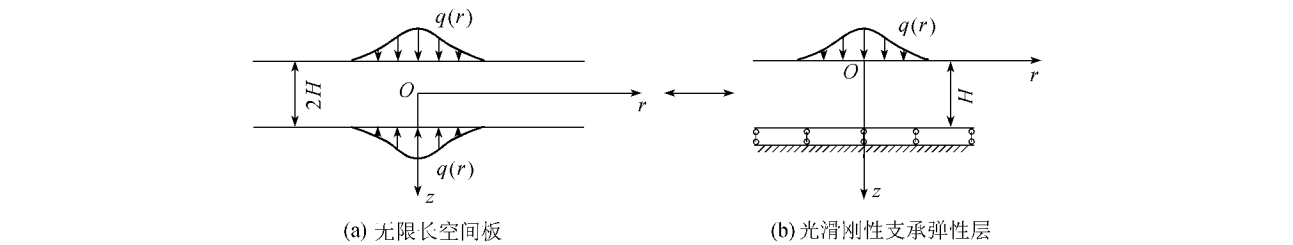


图 1 模型示意图

Fig.1 Sketch of model

有限深空间弹性地基在其表面的 $z = 0$ 处作用任意轴对称荷载 $q(r)$.用 u_r, w 分别表示该弹性体 r 和 z 方向的位移分量; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ 分别表示弹性体的 4 个应力分量; E, μ 分别为弹性体的弹性模量和泊松比; H 为弹性层厚度.在轴对称问题中,可以采用 Love 位移函数 $\zeta(r, z)$ ^[5],应满足的重调和方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \zeta = 0 \tag{1}$$

其对应的位移分量和应力分量为

$$\begin{cases} u_r = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial z} \\ w = \frac{1}{2G} \left[(1 - \mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta \\ \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta \end{cases} \quad (2)$$

对式(1)中的变量 r 进行汉克尔变换得到关于 z 的常微分方程为

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 \bar{\zeta}(\xi, z) = 0 \quad (3)$$

式中 $\bar{\zeta}(\xi, z) = \int_0^\infty r \zeta(r, z) J_0(\xi r) dr$

常微分方程(3)的通解为

$$\bar{\zeta}(\xi, z) = (A + Bz)e^{-\xi z} + (C + Dz)e^{\xi z} \quad (4)$$

式中 A, B, C, D 为任意常数,它们由边界条件确定.

对式(2)中的应力分量和位移分量做汉克尔变换^[6],整理得到

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z(\xi, z) &= \xi^3 e^{-\xi z} A + (1 + \xi z - 2\mu) \xi^2 e^{-\xi z} B - \xi^3 e^{\xi z} C + (1 - \xi z - 2\mu) \xi^2 e^{\xi z} D \\ \bar{\tau}_{rz}(\xi, z) &= \xi^3 e^{-\xi z} A + (\xi z - 2\mu) \xi^2 e^{-\xi z} B + \xi^3 e^{\xi z} C + (\xi z + 2\mu) \xi^2 e^{\xi z} D \\ \bar{u}_r(\xi, z) &= \frac{1 + \mu}{E} [-\xi^2 e^{-\xi z} A + (1 - \xi z) \xi e^{-\xi z} B + \xi^2 e^{\xi z} C + (1 + \xi z) \xi e^{\xi z} D] \\ \bar{w}(\xi, z) &= \frac{1 + \mu}{E} (-\xi^2 e^{-\xi z} A - (2 - 4\mu + \xi z) \xi e^{-\xi z} B - \xi^2 e^{\xi z} C + (2 - 4\mu - \xi z) \xi e^{\xi z} D) \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $\bar{\sigma}_z(\xi, z) = \int_0^\infty r \sigma_z(r, z) J_0(\xi r) dr$, $\bar{\sigma}_z(r, z) = \int_0^\infty \xi \sigma_z(\xi, z) J_0(\xi r) d\xi$, $\bar{\tau}_{rz}(\xi, z) = \int_0^\infty r \tau_{rz}(r, z) J_1(\xi r) dr$, $\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{\tau}_{rz}(\xi, z) J_1(\xi r) d\xi$, $\bar{u}_r(\xi, z) = \int_0^\infty r u_r(r, z) J_1(\xi r) dr$, $u_r(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{u}_r(\xi, z) J_1(\xi r) d\xi$, $\bar{w}(\xi, z) = \int_0^\infty r w(r, z) J_0(\xi r) dr$, $w(r, z) = \int_0^\infty \xi \bar{w}(\xi, z) J_0(\xi r) d\xi$. 其中 $J_0(\xi r)$ 和 $J_1(\xi r)$ 分别为0阶和1阶贝塞尔函数.

图1(b)的边界条件为

$$\begin{cases} w|_{z=H} = 0 \\ \sigma_z|_{z=0} = -q(r) \\ \tau_{rz}|_{z=0} = 0 \\ \tau_{rz}|_{z=H} = 0 \end{cases}$$

对上述边界条件做汉克尔变换,得到

$$\begin{cases} \bar{w}(\xi, z)|_{z=H} = 0 \\ \bar{\sigma}_z(\xi, z)|_{z=0} = -\bar{q}(\xi) \\ \bar{\tau}_{rz}(\xi, z)|_{z=0} = 0 \\ \bar{\tau}_{rz}(\xi, z)|_{z=H} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\bar{q}(\xi) = \int_0^\infty r q(r) J_0(\xi r) dr$.

将变换后的边界条件式(6)代入式(5),并整理得到

$$\begin{cases} -\xi e^{-\xi H} A - (2 - 4\mu + \xi H) e^{-\xi H} B - \xi e^{\xi H} C + (2 - 4\mu - \xi H) e^{\xi H} D = 0 \\ \xi A + (1 - 2\mu) B - \xi C + (1 - 2\mu) D = -\frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^2} \\ \xi A - 2\mu B + \xi C + 2\mu D = 0 \\ \xi e^{-\xi H} A + (\xi H - 2\mu) e^{-\xi H} B + \xi e^{\xi H} C + (\xi H + 2\mu) e^{\xi H} D = 0 \end{cases} \quad (7)$$

求解方程组(7)得到

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{(2\mu - 2\xi H)e^{2\xi H} - 2\mu e^{4\xi H}}{4\xi H e^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^3} \\ B &= -\frac{e^{4\xi H} - e^{2\xi H}}{4\xi H e^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^2} \\ C &= -\frac{2\mu - (2\xi H + 2\mu)e^{2\xi H}}{4\xi H e^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^3} \\ D &= -\frac{e^{2\xi H} - 1}{4\xi H e^{2\xi H} + e^{4\xi H} - 1} \frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^2} \end{aligned}\right. \quad (8)$$

将上述系数代入式(5)并做汉克尔反变换即得到相应的应力和位移分量解答:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= \int_0^\infty \xi^3 e^{-\xi z} A + (1 + \xi z - 2\mu)\xi^2 e^{-\xi z} B - \xi^3 e^{\xi z} C + (1 - \xi z - 2\mu)\xi^2 e^{\xi z} D J_0(\xi r) d\xi \\ \tau_{rz}(r, z) &= \int_0^\infty \xi [\xi^3 e^{-\xi z} A + (\xi z - 2\mu)\xi^2 e^{-\xi z} B + \xi^3 e^{\xi z} C + (\xi z + 2\mu)\xi^2 e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi \\ u(r, z) &= \frac{1+\mu}{E} \int_0^\infty \xi [-\xi^2 e^{-\xi z} A + (1 - \xi z)\xi e^{-\xi z} B + \xi^2 e^{\xi z} C + (1 + \xi z)\xi e^{\xi z} D] J_1(\xi r) d\xi \\ w(r, z) &= \frac{1+\mu}{E} \int_0^\infty \xi [-\xi^2 e^{-\xi z} A - (2 - 4\mu + \xi z)\xi e^{-\xi z} B - \xi^2 e^{\xi z} C + (2 - 4\mu - \xi z)\xi e^{\xi z} D] J_0(\xi r) d\xi \end{aligned}\right. \quad (9)$$

a. 现假定该有限深空间体在水平面作用半径为 a 的均布载荷为 q ,即

$$q(r) = \begin{cases} q & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

对其做汉克尔变换:

$$\bar{q}(\xi) = \int_0^\infty r q(r) J_0(\xi r) dr = \int_0^a r q J_0(\xi r) dr = \frac{qa J_1(\xi a)}{\xi} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)即得到该有限深空间体在水平面作用半径为 a 的均布载荷 q 下的位移和应力解答. 令 $\alpha = \xi H, z = 0$,该有限深弹性地基在轴对称载荷作用下的水平面位移为

$$u(r, 0) = \frac{(1 - \mu^2)}{E} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\alpha + \text{sh} \alpha \text{ch} \alpha} \frac{qa J_1(\xi a)}{\alpha} J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha \quad (11)$$

对 H 取极限,容易得到

$$\lim_{H \rightarrow 0} u(r, 0) = \frac{(1 - \mu^2)qaH}{E} \int_0^\infty J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi$$

积分后得到

$$\lim_{H \rightarrow 0} u(r, 0) = \frac{(1 - \mu^2)qH}{E} \quad (r < a)$$

其对应的文克尔地基模型的基床系数为

$$k = \frac{q}{w} = \frac{E}{(1 - \mu^2)H} \quad (r < a) \quad (12)$$

b. 设 P 为半径 a 的均布荷载的合力,显然, $q = P/(\pi a^2)$ 此时在水平面作用法向集中力 P 时,有

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{P}{\pi a^2} a \frac{J_1(\xi a)}{\xi} \right) = \frac{P}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0+} \left(\frac{J_1(\xi a)}{\xi a} \right) = \frac{P}{2\pi} \quad (13)$$

将式(13)代入式(9)的各分量表达式,即得到在水平面作用集中力时的位移和应力解答. 令 $\alpha = \xi H, z = 0$,该有限深弹性地基在轴对称载荷作用下的水平面位移为

$$\left\{\begin{aligned} u(r, 0) &= \frac{(1 - \mu^2)}{EH} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\alpha + \text{sh} \alpha \text{ch} \alpha} \frac{P}{2\pi} J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha \\ u_r(r, 0) &= \frac{1+\mu}{EH} \int_0^\infty \frac{-(1 - 2\mu)\text{sh} 2\alpha + 2\alpha}{2\alpha + \text{sh} 2\alpha} \frac{P}{2\pi} J_1\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha \end{aligned}\right. \quad (14)$$

对 H 取极限

$$\begin{cases} \lim_{H \rightarrow \infty} u(r, \rho) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{(1-\mu^2)}{EH} \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\alpha + \text{sh} \alpha \text{ch} \alpha} \frac{P}{2\pi} J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = \frac{(1-\mu^2)P}{\pi Er} \\ \lim_{H \rightarrow \infty} u_r(r, \rho) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1+\mu}{EH} \int_0^\infty \frac{-(1-2\mu)\text{sh} 2\alpha + 2\alpha}{2\alpha + \text{sh} 2\alpha} \frac{P}{2\pi} J_1\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)P}{2\pi Er} \end{cases} \quad (15)$$

其中
$$\int_0^\infty J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = \int_0^\infty J_1\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = \frac{H}{r}$$

显然,这与半空间体的布希涅斯克解答在水平面上的位移是一致的。

2 与半无限空间体地基模型的比较

底部完全位移约束下的有限深地基模型,在法向集中力作用下水平面上的位移^[2]为

$$\begin{cases} u(r, \rho) = \frac{1-\mu^2}{EH} \int_0^\infty \frac{(3-4\mu)\text{sh} 2\alpha - 2\alpha}{\alpha^2 + (3-4\mu)\text{ch}^2 \alpha + (1-2\mu)^2} \frac{P}{2\pi} J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha \\ u_r(r, \rho) = \frac{1+\mu}{EH} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - (3-4\mu)\text{sh}^2 \alpha + (6\mu - 8\mu^2)\text{sh}^2 \alpha}{\alpha^2 + (3-4\mu)\text{ch}^2 \alpha + (1-2\mu)^2} \frac{P}{2\pi} J_1\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha \end{cases} \quad (16)$$

对 H 取极限得到

$$\begin{cases} \lim_{H \rightarrow \infty} u(r, \rho) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{(1-\mu^2)P}{2\pi EH} \int_0^\infty \frac{(3-4\mu)\text{sh} 2\alpha - 2\alpha}{\alpha^2 + (3-4\mu)\text{ch}^2 \alpha + (1-2\mu)^2} J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = \frac{(1-\mu^2)P}{\pi Er} \\ \lim_{H \rightarrow \infty} u_r(r, \rho) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1+\mu}{EH} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - (3-4\mu)\text{sh}^2 \alpha + (6\mu - 8\mu^2)\text{sh}^2 \alpha}{\alpha^2 + (3-4\mu)\text{ch}^2 \alpha + (1-2\mu)^2} \frac{P}{2\pi} J_1\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)P}{2\pi Er} \end{cases} \quad (17)$$

其中
$$\int_0^\infty J_0\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = \int_0^\infty J_1\left(r \frac{\alpha}{H}\right) d\alpha = \frac{H}{r}$$

比较式(15)与式(17)可知,在法向集中力作用下,当 $H \rightarrow \infty$ 时,无论底部是光滑刚性支承约束还是完全位移约束,得到的水平面的位移(垂直位移和水平位移)结果与半空间体的布希涅斯克位移解答在水平面上的结果是一致的。

3 与文克尔地基模型的比较

由底部为完全位移约束下的有限深地基模型求得的文克尔地基模型的基床系数^[3]为

$$k = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)H} \quad (r < a) \quad (18)$$

式(18)与式(12)比较可知,当 $H \rightarrow 0$ 时,底部是光滑刚性支承约束和底部是完全位移约束取极限得到的文克尔地基的基床系数是不同的。

4 结 语

本文对底部为光滑刚性支承的有限深地基模型在轴对称荷载作用下的位移和应力进行了分析,得到如下结论:

a. 通过汉克尔变换导出了底部为光滑刚性支承的有限深地基模型在轴对称荷载作用下的位移和应力解答。

b. 当 $H \rightarrow \infty$ 时,无论底部是光滑刚性支承约束还是完全位移约束,在法向集中力作用下得到的水平面的位移(垂直位移和水平位移)结果与半空间体的布希涅斯克位移解答在水平面上的结果是一致的。

c. 当 $H \rightarrow 0$ 时,底部是光滑刚性支承约束和底部是完全位移约束取极限得到的文克尔地基的基床系数是不同的,前者对应的基床系数为 $k = \frac{E}{(1-\mu^2)H}$,后者对应的基床系数为 $k = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)H}$ 。

参考文献:

[1] 赵光恒,张子明.有限深弹性层上基础梁的计算[J].华东水利学院学报,1984,13(2):32-45.

[2] 张子明,赵光恒.用初函数法计算成层地基在轴对称荷载作用下的位移和应力[J].华东水利学院学报,1985,13(4):40-48.

[3] 张子明.有限深地基表面在环形均布荷载作用下的沉陷计算[J].河海大学学报 ,1987 ,15(4) 24-33.
[4] 铁摩辛柯,古地尔.弹性理论[M].徐芝纶,译.北京:高等教育出版社,1990 63-67.
[5] 徐芝纶.弹性力学.上册.[M].北京:高等教育出版社,1990 293-294.
[6] 《数学手册》编写组.数学手册[M].北京:高等教育出版社,1979 279-284 584-585.

Displacement and stress analysis of infinite spatial
plate under axial symmetric loads

HUANG Yao-ying¹, WANG Run-fu², WU Zhong-ru¹

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract :By use of the Hankel transform, the displacement and stress solutions of infinite spatial plate under axial symmetric loads were obtained. Through comparison of the foundation model for finite depth under rigid constraint, the semi-finite elastic foundation model, and the Winkler foundation model for displacement and stress analysis, some conclusions are drawn: for the elastic layer with finite depth under smooth rigid supporting constraint or rigid constraint, if the depth of foundation approaches to infinite, the horizontal displacement under action of vertically concentrated forces accords with that of Boussinesq solution of semi-infinite body; if the depth of foundation approaches to zero the limit values of the bedding coefficients for the Winkler foundation model obtained under smooth rigid supporting constraint and rigid constraint are different.

Key words :infinite spatial plate; foundation with finite depth; smooth rigid supporting; Hankel transform; axial asymmetry

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊,主要刊登本校在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果、学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考。

本刊创办于 1957 年,是我国中文核心期刊,在国内工程技术界和学术界有较大影响。刊载的文章中,有不少国家科技攻关(重点)项目和各种科学基金资助项目的研究成果,部分达到了国内领先和国际先进水平,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议,发挥了较大的社会效益和经济效益,深受工程界和科技界赞许,并获得全国高校科技期刊优秀编辑出版质量奖以及中国期刊方阵“双效期刊”、江苏省优秀期刊、全国水利系统优秀期刊称号。

本刊每逢单月出版,国内外公开发行。邮发代号:28-63,每期定价 12.00 元,全年 6 期共 72 元。欢迎广大读者在全国各地邮局订阅或直接与编辑部联系。联系地址:南京市西康路 1 号《河海大学学报(自然科学版)》编辑部,邮政编码 210098,联系电话 025-83786343。