

解非线性常微分方程边值问题差分方程的数值延拓法

钮 群

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :非线性常微分方程的差分方程是一个非线性方程组 .根据解非线性方程组的全局收敛方法 ,采用数值延拓法研究常微分方程边值问题数值解的计算方法 ,并给出了该算法为全局收敛的充分条件 .通过计算具体算例的数值解 ,表明该计算方法是可行的 .
关键词 :边值问题 ;差分方程 ;同胚 ;全局收敛 ;数值延拓法
中图分类号 :O175.14 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2006)03-0345-04

在实际应用中 ,经常需要求解以下第一边值问题^[1]

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(a) = y_a, y(b) = y_b \end{cases} \tag{1}$$

的数值解 .假设函数 $f(x,y,u)$ 的偏导数 $f_y(x,y,u), f_u(x,y,u)$ 在 $[a,b] \times R \times R$ 上连续 .问题 (1) 的有限差分方程一般是非线性方程组 ,采用 Newton 迭代方法^[2]求其数值解 ,具有收敛速度快等优点 ,但明显的缺点是往往要求初始向量非常靠近解 ,因此所得算法往往是局部收敛的 .数值延拓法是扩大收敛域的尝试^[3] .显然 ,从理论上验证扩大收敛域尝试的可行性是非常重要的 .

1 建立差分方程

为了建立问题 (1) 的有限差分方程 ,将区间 $[a,b]$ 等分为 $n+1$ 份 ,步长为 $h=(b-a)/(n+1)$,令 $x(i)=a+ih(i=1,2,\dots,n)$.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad y''_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + O(h^2)$$

假设 :

$$F(1) = 2y_1 - y_2 - y_a + h^2 f\left(x(1), y_1, \frac{y_2 - y_a}{2h}\right)$$

$$F_1(1) = \frac{\partial F(1)}{\partial y_1} = 2 + h^2 f_y\left(x(1), y_1, \frac{y_2 - y_a}{2h}\right)$$

$$F_2(1) = \frac{\partial F(1)}{\partial y_2} = -1 + \frac{h}{2} f_u\left(x(1), y_1, \frac{y_2 - y_a}{2h}\right)$$

$$F(i) = 2y_i - y_{i+1} - y_{i-1} + h^2 f\left(x(i), y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) \qquad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$F_1(i) = \frac{\partial F(i)}{\partial y_i} = 2 + h^2 f_y\left(x(i), y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)$$

$$F_2(i) = \frac{\partial F(i)}{\partial y_{i+1}} = -1 + \frac{h}{2} f_u\left(x(i), y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)$$

$$F_3(i) = \frac{\partial F(i)}{\partial y_{i-1}} = -1 - \frac{h}{2} f_u\left(x(i), y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)$$

$$F(n) = 2y_n - y_b - y_{n-1} + h^2 f\left(x(n), y_n, \frac{y_b - y_{n-1}}{2h}\right)$$

$$F_1(n) = \frac{\partial F(n)}{\partial y_n} = 2 + h^2 f_y(x(n), y_n, \frac{y_b - y_{n-1}}{2h})$$

$$F_3(n) = \frac{\partial F(n)}{\partial y_{n-1}} = -1 - \frac{h}{2} f_u(x(n), y_n, \frac{y_b - y_{n-1}}{2h})$$

令: $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in R^n$ $F(y) = [F(1), F(2), \dots, F(n)]^T \in R^n$

则问题(1)中的微分方程的差分方程为

$$F(y) = 0 \quad (2)$$

其截断误差为 $O(h^2)$.

$$F'(y) = \sum_{k=1}^n e_k e_k^T F(k) + \sum_{k=1}^{n-1} e_k e_{k+1}^T F_2(k) + \sum_{k=2}^n e_{k-1} e_k^T F_3(k)$$

$$e_k = [\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_k \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

2 采用数值延拓法求解差分方程

对于一般的非线性方程组 $F(y) = 0$ 而言, 令:

$$H(y, t) = F(y) + (t-1)F(y^0) \quad (y \in D, t \in [0, 1])$$

所谓数值延拓法是扩大收敛域的尝试. 文献[4~5]给出一些数值延拓法可行的充分条件. 为了进一步研究, 给出以下引理.

引理1^[6] 假设 $B \in L(R^n)$, 若 $\|B\| < 1$, 则 $I - B$ 可逆.

引理2^[6] 设 $F: D \subseteq R^n \rightarrow R^n$, 在 D 上连续可微, 若存在非异矩阵 $M(y)$, $y \in D$ 使有: $\|I - M(y)\| \leq \alpha(\|y\|) < 1$, $\|M(y)\| \leq \omega(\|y\|)$, 且若 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \alpha(t)}{\omega(t)} dt = +\infty$, 其中 $\omega(t), \alpha(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上实连续函数, 则 F 是 D 到 R^n 上的同胚^[7].

引理3^[8] 假定 $H: D \times [0, 1] \subset R^n \times R^1 \rightarrow R^n$ 对第一个变量是 F -可微, 又设 $\partial_1 H$ 在 $D \times [0, 1]$ 上是连续的. 另外, 假设存在 $H(y, t) = 0, t \in [0, 1]$ 的一个连续解 $y: [0, 1] \rightarrow \text{int}(D)$, 而且对所有 $t \in [0, 1]$, $\partial_1 H(y(t), t)$ 是非奇异的. 则存在 $[0, 1]$ 上的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$ 和整数 $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}$, 使得由式(3)和式(4)所定义的迭代序列 $\{y^{i,k}\}$ 保留在 D 内, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{N,k} = y(1)$ 就是 $F(y) = 0$ 的解).

$$\left. \begin{aligned} y^{i,k+1} &= y^{i,k} - \partial_1 H(y^{i,k}, t_i)^{-1} H(y^{i,k}, t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \\ y^{1,0} &= y^0, y^{i+1,0} = y^{i,m_i} \quad (k = 0, 1, \dots, m_i - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$y^{N,k+1} = y^{N,k} - \partial_1 H(y^{N,k}, 1)^{-1} H(y^{N,k}, 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

定理1 设 $F: R^n \rightarrow R^n$, 连续可微, 若存在非异矩阵 $M(y)$, $y \in R^n$ 使有: $\|I - M(y)F'(y)\| \leq \alpha(\|y\|) < 1$, $\|M(y)\| \leq \omega(\|y\|)$ 且 $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \alpha(t)}{\omega(t)} dt = +\infty$, 其中 $\omega(t), \alpha(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上实连续函数, 则方程 $F(y) = 0$ 存在唯一的解, 且存在 $[0, 1]$ 上的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$ 和整数 $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}$, 使得由式(3)式(4)所定义的迭代序列 $\{y^{i,k}\}$ 保留在 R^n 内, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{N,k} = y(1)$ 就是 $F(y) = 0$ 的解).

证明: 由引理1知 $I - (I - M(y)F'(y)) = M(y)F'(y)$ 可逆, 而 $M(y)$ 可逆, 所以 $F'(y)$ 可逆. $H(y, t) = F(y) + (1-t)F(y^0)$, $\partial_1 H = F'(y)$ 可逆, 连续. 由引理2, F 是 $R^n \rightarrow R^n$ 的同胚. 因此方程 $F(y) = 0$ 存在唯一的解. 方程 $H(y, t) = 0$, 即 $F(y) = (t-1)F(y^0)$, $y = F^{-1}((t-1)F(y^0))$ 是 $H(y, t) = 0$ 的连续解. 由引理3可得定理1成立. 证毕.

以下讨论差分方程(2)解存在唯一性及求解的数值延拓计算方法.

定理2 如果在第一边值问题(1)中, 满足:

$$\begin{cases} |2 + 2h^2 f_y(x, y, u)| \geq \omega_1(y, u) > 0 \\ |2 \pm h f_u(x, y, u)| \leq \omega_2(y, u) \end{cases}$$

其中 $\omega_1(y, u)$ 分别关于 y, u 单调不减, $\omega_2(y, u)$ 分别关于 y, u 单调不减, $\omega_1(s, s), \omega_2(s, s)$ 为 $[0, +\infty)$ 上

的连续函数 $\omega_1(s,s) > \omega_2(s,s)$ 并且 $\int_0^{+\infty} (\omega_1(s,s) - \omega_2(s,s))ds = +\infty$,则差分方程 (2) 存在唯一的解 ,且存在 $[0,1]$ 上的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$ 和整数 $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}$,使得由式 (3) 和式 (4) 所定义的迭代序列 $\{y^{i,k}\}$ 保留在 R^n 内 ,且 $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{N,k} = y(1)$ 就是 $F(y) = 0$ 的解).

证明 :

$$F'(y) = D_1(y) + D_2(y) + D_3(y) \quad D_1(y) = \sum_{k=2}^n e_{k-1} e_k^T F_3(k)$$

$$D_3(y) = \sum_{k=1}^{n-1} e_k e_{k+1}^T F_2(k) \quad e_k = [\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_k \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

$$D_2(y) = \text{diag}[F_1(1), F_1(2), \dots, F_1(n-1), F_1(n)]$$

令 :

$$M(y) = D_2(y)^{-1} = \text{diag}[F_1(1)^{-1}, F_1(2)^{-1}, \dots, F_1(n)^{-1}]$$

$$\|M(y)\|_1 \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |F_1(i)|} = \frac{1}{|F_1(j)|} = \begin{cases} 1/|2 + h^2 f_3(x(1), y_1(y_2 - y_a)(2h))| & j = 1 \\ 1/|2 + h^2 f_3(x(j), y_j(y_{j+1} - y_{j-1})(2h))| & 2 \leq j \leq n-1 \\ 1/|2 + h^2 f_3(x(n), y_n(y_b - y_{n-1})(2h))| & j = n \end{cases}$$

由已知条件可得

$$\|M(y)\|_1 \leq \frac{1}{\omega_1(\|y\|_1 + |y_a| + |y_b|)(2h)(\|y\|_1 + |y_a| + |y_b|)(2h)} = \omega(\|y\|_1)$$

$$I - M(y)F'(y) = I - D_2^{-1}(D_1 + D_2 + D_3) = -D_2^{-1}D_1 - D_2^{-1}D_3 = -MD_1 - MD_3$$

$$\|I - M(y)F'(y)\|_1 \leq \|M\|_1 \|D_1\|_1 + \|M\|_1 \|D_3\|_1 \leq \omega(\|y\|_1) \|D_1\|_1 + \omega(\|y\|_1) \|D_3\|_1$$

$$\|D_1\|_1 \leq \max_{2 \leq i \leq n} |F_3(i)| = \begin{cases} |F_3(k)| = |-1 - (h/2)f_u(x(k), y_k(y_{k+1} - y_{k-1})(2h))| & (k \neq n) \\ |-1 - (h/2)f_u(x(n), y_n(y_b - y_{n-1})(2h))| & (k = n) \end{cases}$$

从已知条件得 $\|D_1\|_1 \leq (1/2)\omega_2(\|y\|_1 + |y_a| + |y_b|)(2h)(\|y\|_1 + |y_a| + |y_b|)(2h)$

$$\|D_2\|_1 \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |F(i)| = |F_2(l)| = \begin{cases} |-1 + (h/2)f_u(x(l), y_l(y_{l+1} - y_{l-1})(2h))| & (l \neq 1) \\ |-1 + (h/2)f_u(x(1), y_1(y_2 - y_a)(2h))| & (l = 1) \end{cases}$$

由已知条件得 $\|D_2\|_1 \leq (1/2)\omega_2(\|y\|_1 + |y_a| + |y_b|)(2h)(\|y\|_1 + |y_a| + |y_b|)(2h)$. 从而

$$\|I - M(y)F'(y)\|_1 \leq \frac{\omega_2}{2\omega_1} + \frac{\omega_2}{2\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \delta(\|y\|_1) < 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \delta(s)}{\omega(s)} ds &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \omega_2/\omega_1}{1/\omega_1} ds = \\ \int_0^{+\infty} [\omega_1((s + |y_a| + |y_b|)(2h)(s + |y_a| + |y_b|)(2h)) - \\ \omega_2((s + |y_a| + |y_b|)(2h)(s + |y_a| + |y_b|)(2h))] ds &= \\ \int_{(|y_a| + |y_b|)(2h)}^{+\infty} [\omega_1(s,s) - \omega_2(s,s)] ds &= +\infty \end{aligned}$$

由定理 1 ,可得定理 2 的结论正确. 证毕.

3 应用算例

用本文方法判别以下非线性常微分方程第一边值问题 (5) 的差分方程的解存在且具有唯一性 ,计算其数值解并画出近似的积分曲线图形.

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{5e^x}{x^2 + 0.001} + 50.5y + \arctan y + \ln(1 + e^{\frac{dy}{dx}}) \\ y(-1) = 2, y(1) = 2 \end{cases} \tag{5}$$

将区间 $[-1,1]$ 分为 201 等份 ,步长为 $h = \frac{2}{201}, \frac{1}{h} = 100.5$. 令 :

$$f(x, y, u) = \frac{5e^x}{x^2 + 0.001} + 50.5y + \arctan y + \ln(1 + e^u)$$

$$\begin{aligned} |2 + 2h^2 f_3(x, y, u)| &= 2 + 2h^2 \left(50.5 + \frac{1}{1 + y^2} \right) = \omega_1 \downarrow \\ |2 \pm h f_u(x, y, u)| &= |2 \pm \frac{he^u}{1 + e^u}| \leq 2 + \frac{he^u}{1 + e^u} = \omega_2 \uparrow \\ \omega_1(s, s) - \omega_2(s, s) &= 2h^2 \times 50.5 - \frac{he^s}{1 + e^s} + \frac{2h^2}{1 + s^2} = h^2 \left(101 - \frac{1}{h} \frac{e^s}{1 + e^s} \right) + \frac{2h^2}{1 + s^2} = \\ &h^2 \left(101 - \frac{100.5e^s}{1 + e^s} \right) + \frac{2h^2}{1 + s^2} > 0 \\ \int_0^{+\infty} [\omega_1(s, s) - \omega_2(s, s)] ds &= \int_0^{+\infty} \left[h^2 \left(101 - \frac{100.5e^s}{1 + e^s} \right) + \frac{2h^2}{1 + s^2} \right] ds = +\infty \end{aligned}$$

由定理 2 知,式(5)的差分方程存在唯一的解,使用式(3)和式(4)迭代算法,得边值问题(5)的近似积分曲线,如图 1 所示.

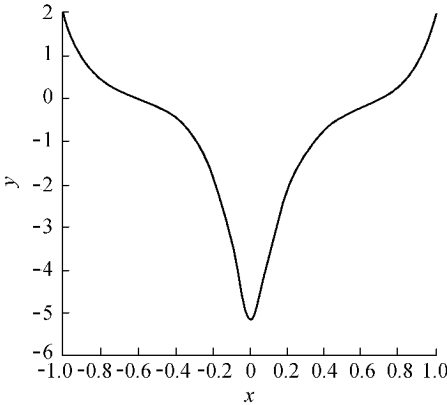


图 1 近似积分曲线
Fig.1 Approximate integral curve

参考文献:

[1] 王梓坤.常用数学公式大全[M].重庆:重庆出版社,1991:1106-1108.
[2] DEMBO R S, EISENSTAT S C, STEIBAUS T. Inexact Newton methods SIAM[J]. Numer. Anal, 1982, 19(2):400-408.
[3] 奥特加 J M, 莱因博尔特 W C. 多元非线性方程组迭代解法[M]. 朱季纳, 译. 北京: 科学出版社, 1983: 354-361.
[4] AVILA J H. The feasibility of continuation methods for nonlinear equations[J]. SIAMJ Number Analysis, 1974(11):102-122.
[5] SHEN Z. Diffeomorphism and the feasibility of the numerical continuation method[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1985, 9(5):495-502.
[6] 钮群. 解非线性方程组全局收敛方法(1)[J]. 河海大学学报, 1993, 21(2):95-98.
[7] RADULESCU M, RADULESCU S G. Inversions theorems and applications to differential equations[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1980, 4(5):951-967.
[8] 钮群. 解拟线性抛物型初边值问题差分方程的数值延拓法[J]. 南京大学学报: 数学半年刊, 2005, 23(2):331-336.

Numerical continuation method for solving nonlinear difference equations of ordinary differential equation boundary value problem

NIU Qun
(College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract: For obtaining the numerical solution to the nonlinear difference equations of ordinary differential equation boundary value problem, it is necessary to solve a system of nonlinear equations. Based on the global convergence method for solving the nonlinear equations, the numerical continuation method was adopted to find the numerical solution to nonlinear difference equations of ordinary differential equation boundary value problem, and the sufficient condition was given for the numerical method to realize the global convergence. An example was given to demonstrate the feasibility of the numerical method.

Key words: boundary value problem; difference equation; homeomorphism; global convergence; numerical continuation method