

非结构型浅水方程数值模式的建立及应用

孔 俊 宋志尧 张红贵

(河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室、河海大学海洋学院,江苏 南京 210098)

摘要 :用非结构三角形同位网格剖分计算区域、布置计算变量,用有限体积法离散方程,并采用推进线边界法处理动边界问题,从而建立了一种新的浅水方程数值模式.京唐港和三沙湾海域潮流的率定、验证结果表明,该模式不仅物理意义明确,数值方法简单,全域内满足水流质量和动量的守恒性,而且能更好地模拟海湾、河口复杂地形下的水流运动,反映水流漫滩和露滩等过程.

关键词 :浅水方程;非结构同位网格;有限体积法;线边界法;动边界

中图分类号 :TV131.4 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2006)04-0456-04

河口和海湾地区岛屿较多,平面形态复杂,模拟此类复杂水域的水流运动,传统正交或非正交曲线网格很难满足工程可行性研究的需要.基于三角形网格的传统方法(如有限元法^[1])因计算工作量大,在实际应用中会受到区域大小和网格数的限制.三角元法^[2](也称有限节点法),由于在方程离散时未考虑方程的守恒性,模拟丁坝附近水流时难以保证丁坝的不透水性.此外,以上 2 种方法在计算过程中为保证闭边界法向流速为零,需对边界流速进行二次修正,故易引入计算误差.有限体积法中的 FVCOM 模式^[3]在处理海湾岬角和丁坝头部等尖角岸壁时,水流连续方程的离散形式是否能满足水流质量的守恒性还值得商榷,而 Untrim 模式^[4]虽克服了以上不足,但在计算时采用了 $E-L$ 方法,存在插值精度和寻址耗时等问题.其他计算模式也大都采用 Simple 算法和柯西-黎曼计算模式^[5],比较复杂而不易推广.

本文针对现有模式存在的问题,建立了一种边界易拟合、局部易加密、质量和通量守恒的浅水方程计算模式.

1 二维水流基本方程

沿水深积分的二维水流连续和运动方程为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uD) + \frac{\partial}{\partial y}(vD) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial uD}{\partial t} + \frac{\partial u^2 D}{\partial x} + \frac{\partial uvD}{\partial y} - fvD = -gD \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_{sx} - \tau_{bx}}{\rho_0} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2A_m D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_m D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial vD}{\partial t} + \frac{\partial uvD}{\partial x} + \frac{\partial v^2 D}{\partial y} + fuD = -gD \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_{sy} - \tau_{by}}{\rho_0} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2A_m D \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[A_m D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (3)$$

式中: ρ_0 ——流体密度; g ——重力加速度; u, v ——垂线 x, y 方向的平均流速; D ——总水深; ζ ——水位; f ——科氏力系数; A_m ——根据 Smagotinsky 公式计算的水平紊动黏滞系数; τ_{sx}, τ_{sy} ——表面切应力; τ_{bx}, τ_{by} ——底部切应力.

2 方程离散

2.1 离散形式

将计算变量 u, v 和 ζ 布置于三角形中心点处.根据有限体积法的基本思想,用格林函数将连续方程和运动方程在一个完整三角形区域内积分展开,得

$$\zeta_j^{n+1} = \zeta_j^n - \text{dt} \oint_l v_n \bar{D}_i \text{d}s / \Omega_j \tag{4}$$

$$u_j^{n+1} = \text{dt} \left\{ - \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^n \bar{D}_i v_n \text{d}l_i + f v_j^n D_j \Omega_j - g D_j \zeta_x^{n+1} \Omega_j + \frac{\tau_{sx} - \tau_{lx}}{\rho_0} \Omega_j + \oint_l \left(2 A_m \bar{D}_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) \text{d}y - \oint_l \left[A_m \bar{D}_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \text{d}x \right\} \wedge (\Omega_j D_j) + u_j^n \tag{5}$$

$$v_j^{n+1} = \text{dt} \left\{ - \sum_{i=1}^3 \bar{v}_i^n \bar{D}_i v_n \text{d}l_i - f u_j^n D_j \Omega_j - g D_j \zeta_y^{n+1} \Omega_j + \frac{\tau_{sy} - \tau_{ly}}{\rho_0} \Omega_j - \oint_l \left(2 A_m \bar{D}_i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \text{d}x + \oint_l \left[A_m \bar{D}_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \text{d}y \right\} \wedge (\Omega_j D_j) + v_j^n \tag{6}$$

式中： ζ_j^n, ζ_j^{n+1} —— n 和 $n+1$ 时刻单元 j 上的水位； v_n ——垂直于三角形边上的速度分量； l ——由网格单元 3 条边组成的逆时针闭合轨迹； $\bar{u}_i^n, \bar{v}_i^n$ —— n 时刻三角形第 i 条边上 x, y 方向的平均流速； $\bar{u}_i^{n+1}, \bar{v}_i^{n+1}$ —— $n+1$ 时刻三角形第 i 条边上 x, y 方向的平均流速； u_j^n, v_j^n —— n 时刻三角形 j 上的 x, y 方向的流速； u_j^{n+1}, v_j^{n+1} —— $n+1$ 时刻三角形 j 上的 x, y 方向的流速； $\text{d}l_i$ ——三角形第 i 条边的长度； $\text{d}t$ ——时间步长； D_j ——单元 j 的平均水深； $\bar{D}_i$ ——单元边线平均水深； Ω_j ——三角形 j 的面积； $\zeta_x^{n+1}, \zeta_y^{n+1}$ —— $n+1$ 时刻 x, y 方向的水位偏导数； $\text{d}s$ ——微分弧长； $\text{d}x, \text{d}y$ —— x, y 方向的微步长。

2.2 法向通量的确定

单元边中点处 x 方向的流速 u 可通过下式求得。

$$u = (1 - \lambda) u_L + \lambda u_R + [(1 - \lambda) u_{xL} + \lambda u_{xR}] \text{d}x + [(1 - \lambda) u_{yL} + \lambda u_{yR}] \text{d}y \tag{7}$$

式中： λ ——比例系数； u_L, u_R ——单元 L 和单元 R 中心处 x 方向的流速(图 1)； u_{xL}, u_{xR} ——流速在 x 方向的一阶偏导数； u_{yL}, u_{yR} ——流速在 y 方向的一阶偏导数。

同理,由式(7)可以求得单元边线中点 y 方向的流速 v ,进而可以得到边中点的法向流速。

采用如下方法计算穿过三角形边上的动量通量^[6]。

$$\bar{u}_i^n = \begin{cases} u^n(x_L, y_L) & (v_{ni} \geq 0) \\ u^n(x_R, y_R) & (v_{ni} < 0) \end{cases} \quad \bar{v}_i^n = \begin{cases} v^n(x_L, y_L) & (v_{ni} \geq 0) \\ v^n(x_R, y_R) & (v_{ni} < 0) \end{cases} \tag{8}$$

式中： u^n, v^n —— x, y 方向 n 时刻的流速； v_{ni} ——三角形边中点处的法向流速； x_L, y_L, x_R, y_R ——相邻两三角形中心点的坐标。

2.3 动边界的实现

根据非结构网格的特点,用推进线边界法^[7]处理动边界问题,即通过滩地结构化编码 1→2→3→...将水位信息逐层传入,如图 2 所示。当 3 条边的水深均小于给定值时,对该单元进行完全露滩处理。每计算一定时步后,可完成 1 次水深判断。落潮时滩面水位由下式获得。

$$\zeta = \min(\zeta_1, \zeta_2) \tag{9}$$

式中 ζ, ζ_1 和 ζ_2 分别为滩面水位、计算水位和传递水位。

采用这种方法可以有效地避免落潮时滩面水位高于滩外水位情况的发生。

2.4 定解条件和计算方法

按给定的最外围的三角形中心处潮位和流速确定开边界条件,采用预估-校正方法^[8]计算 ζ, u 和 v 。

3 应用实例

为了验证本文模式的精度和实用性,对渤海湾京唐港附近水域和福建三沙湾三都岛附近水域的潮流进行了数值模拟。

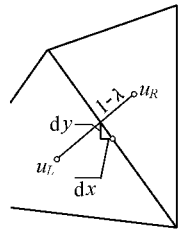


图 1 计算单元
Fig.1 Calculation element

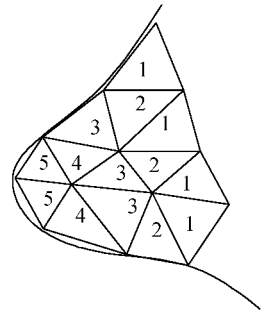


图 2 滩地网格编码
Fig.2 Encode on beach network

3.1 京唐港附近水域潮流模拟

京唐港三面环海,属不规则半日潮海域,是典型的挖入式港池,如图3所示。

京唐港海域潮差较小,平均潮差1.0m左右。根据计算精度要求,将计算区域划分为14378个网格,最小单元为38.74m,计算时步取为2s。验证结果如图4所示。

从图4可知,数值模拟结果较好地反映了该海域的潮波过程,达到了JTJ/T 233—98《海岸与河口潮流泥沙模拟技术规程》^[2]的要求。

从图5、图6可知,该海域潮流沿岸向运动,受拦沙导堤挑流作用的影响,分别在导堤两侧形成涨、落潮回流。这与物理模型试验结果较为一致^[9]。

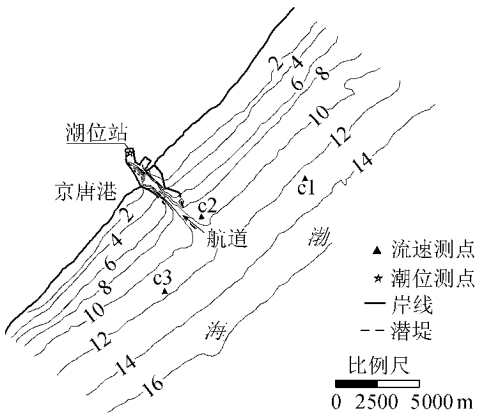


图3 工程区轮廓图

Fig.3 Outline of project area

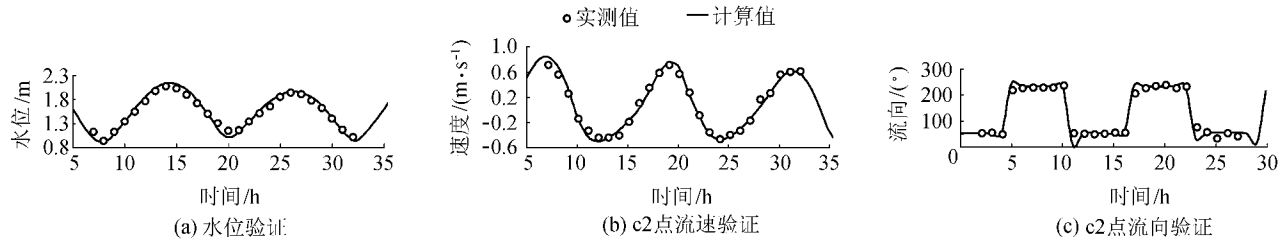


图4 模型验证

Fig.4 Model verification

3.2 三都岛附近水域潮流模拟

三都岛西侧海域地形复杂(图6),潮间带宽达数km,滩槽交替,有宁德水道和宝塔水道,潮滩边界变化较大。实测结果表明,该海域平均潮差可达8m。

模型网格空间步长200m(图7),模式时间步长6s。模拟结果如图8、图9所示。

由图8、图9可知,涨潮时水流漫滩,落潮时水流归槽。这与实际情况较为吻合。

4 结 束 语

为了更好地模拟海湾、河口复杂地形下的水流运动,反映水流漫滩和露滩等过程,本文提出了一种新的非结构型浅水方程数值模式。该模式剖分计算区域、布

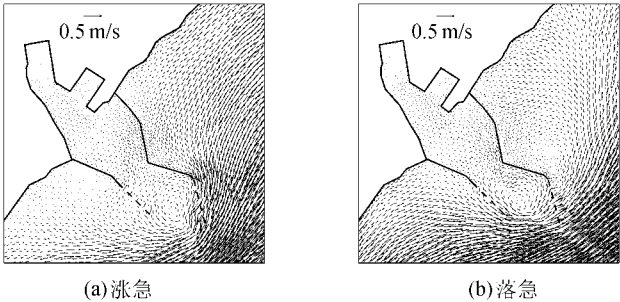


图5 港池附近流场(图中虚线代表潜堤)

Fig.5 Velocity field near harbor basin (dashed line represents submerged dyke)

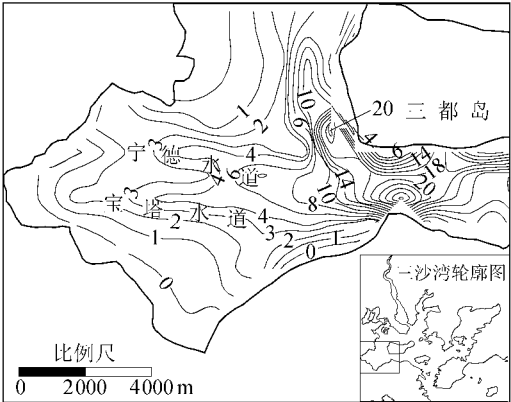


图6 三都岛附近水下地形

Fig.6 Underwater topography near Sandu island

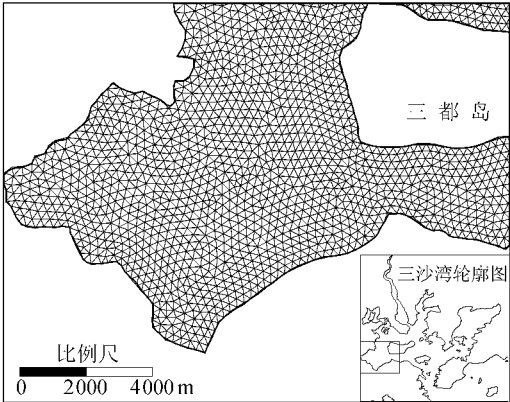


图7 区域网格布置

Fig.7 Element arrangement for computational region

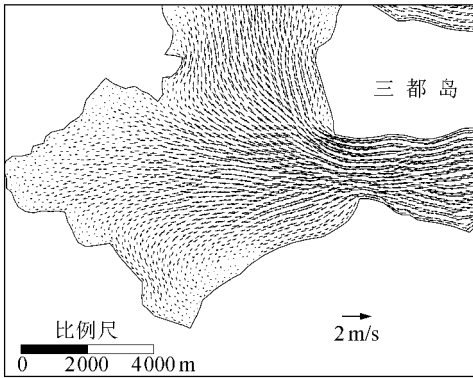


图 8 涨潮漫滩时的流场

Fig.8 Velocity field for beach in flood tide

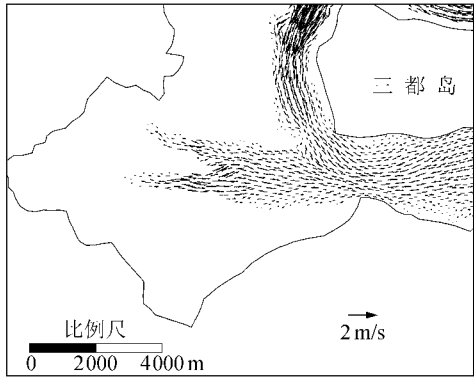


图 9 落潮露滩时的流场

Fig.9 Velocity field for beach in ebb tide

置计算变量时采用三角形同位网格,离散方程时采用有限体积法,并用推进线边界法处理动边界问题.京唐港和三沙湾三都岛附近潮流模拟结果表明,本文模式能够客观地反映复杂地形下的水流运动特征.

参考文献：

[1] 李义天,赵明登,曹志芳,等.河道平面二维水沙数学模型[M].北京:中国水利水电出版社,2001:52-73.
[2] 交通部天津水运工程科学研究所.JTJ/T233—98 海岸与河口潮流泥沙模拟技术规程[S].北京:人民交通出版社,1999.
[3] CHEN Chang-sheng ,LIU He-dong ,BEARDSLEY R C. An unstructured grid finite volume three dimension primitive equation ocean model : application to coastal ocean and estuary[J]. Journal of Atmospheric And Oceanic Technology 2003 ,20 :153-186.
[4] CAUSULLI V ,WALTERS R A. An unstructured grid ,three-dimensional model based on the shallow water equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids 2000 ,32 :331-348.
[5] 赵棣华,沈福新,颜志俊,等.基于有限体积法及 FDS 格式的感潮河段二维泥沙冲淤模型[J].水动力学研究与进展(A), 2004 ,19(1) 98-103.
[6] KOBAYASHI M H ,PEREIRA J M C ,PEREIRA J C F. A Conservative finite volume second-order-accurate projection method on hybrid unstructured grid[J]. J Comput Phys ,1999 ,150 :40-45.
[7] 宋志尧,薛鸿超,严以新,等.线边界法在潮流模拟中的应用[J].海洋工程,2000 ,18(4) 49-53.
[8] 朱建荣,杨陇慧,朱首贤,等.预估修正法对河口海岸海洋模式稳定性的提高[J].海洋与湖沼,2002 ,1(1) :15-22.
[9] 孙林云,刘建军,孙波,等.京唐港泥沙淤积及工程措施研究[C]//中国海洋工程学会.第十二届中国海岸工程学术讨论会论文集.北京:海洋出版社,2005 :494-500.

New non-structured numerical model for solving shallow water equation and its application

KONG Jun , SONG Zhi-yao , ZHANG Hong-gui

(State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering ,
College of Ocean , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :With non-structured collocated triangle grid to divide the computational region and to arrange the computation variables , the finite volume method to discretize formulas , and the progressive line boundary method to deal with the dynamic boundary , a new numerical model was developed for solving the 2-D shallow water equation. The model was applied to simulation of tides near Jingtang harbor and Sansha bay , and the calculated results were in good agreement with the field data. Study shows that the model is clear in physical meaning and simple in numerical calculation , and it satisfies the conservation of flow mass , momentum and continuity in computational regions. Moreover , it is effective for simulation of flow movement under complex topography near bays , and estuaries and for reflection of flood tides and ebb tides.

Key words :shallow water equation ; non-structured collocated grid ; finite volume method , linear boundary method ; dynamic boundary