

向量分整时间序列的协整关系探讨

曹广喜

(河海大学商学院,江苏 南京 210098)

摘要 针对向量分整时间序列,首先给出几个性质,并利用这几个性质给出向量分整时间序列的线性协整关系存在的条件,然后把整数阶广义协整的概念推广到分数阶情形,并利用广义分整协整得到向量分整时间序列的非线性协整关系存在的一个充分条件,且给出具体的非线性函数形式,最后结合 R/S 分析,给出一个判断非线性协整关系的实用算法.

关键词 长记忆性;分整;非线性协整;广义分整协整

中图分类号 F830.9 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2006)04-0469-04

利用时间序列研究经济系统是自然和社会科学一个非常重要的课题.以往人们通常假设经济系统是平稳的,并提出了许多经济模型.但理论和实证分析证明,许多的经济系统都是非平稳的复杂系统.因此,寻求经济时间序列之间的长期均衡关系就显得越来越重要了.Engle 等^[1]于 1987 年提出了寻求系统内部存在的长期线性均衡关系的线性协整的定义.但 Engle 等^[1]的协整概念是在向量序列的单整阶数全部相等的基础上提出的,因此具有很大的局限性.程细玉等^[2]针对整数阶的局限性问题,提出了分整时间序列的概念.为了改变线性协整的局限性,程细玉等^[2-3]给出了非线性协整的定义.在现实经济系统中,许多经济变量具有长记忆的特点,具体表现在分数阶的特性上^[4-5].因此,向量分整时间序列的线性和非线性协整关系成为近年来时间序列和计量经济研究的一个热点问题.在向量分整时间序列的协整关系研究中,一个重要的问题就是线性或非线性协整关系存在性的判断,以及线性和非线性函数具体表示形式的寻找.

本文针对向量分整时间序列,首先给出几个有用性质,并利用这几个性质给出向量分整时间序列的线性协整关系存在的必要条件,然后把文献[6]的整数阶广义协整的概念推广到分数阶情形,并利用广义分整协整得到向量分整时间序列的非线性协整关系存在的一个充分条件,且给出具体的非线性函数形式,最后针对长记忆向量时间序列,结合 R/S 分析,给出一个判断非线性协整关系的实用算法.

1 向量分整时间序列的线性协整关系

首先给出以下几个基本概念.

定义 1^[7] 若随机序列 $\{x_t\}$ 满足差分方程 $\nabla^d x_t = a_t$,其中 a_t 为平稳过程且其谱密度 $f(\omega)$ 满足 $0 < f(\omega) < \infty, |d| < 0.5$ (b)不存在 $d' < d, d' \neq 0$,使 $\nabla^{d'} x_t$ 为平稳过程,则称 $\{x_t\}$ 为分数阶单整平稳序列或分整序列,记为 $x_t \sim F(d)$.

定义 2^[7] 若 m 维向量时间序列 $\{X_t\}$ 其中 $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T$,满足 (a) $x_{it} \sim F(d_i), |d_i| < 0.5, i = 1, 2, \dots, m$ (b)存在非零的 m 维函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$,使 $f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}) \sim I(0)$,则称向量时间序列 $\{X_t\}$ 存在协整关系.当 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为线性函数时,则称 $\{X_t\}$ 存在线性协整关系;当 $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为非线性函数时,则称 $\{X_t\}$ 存在非线性协整关系.

下面给出几个引理,也可以说是关于向量分整时间序列的几个性质.

引理 1 若 $x_{it} \sim F(d), \beta_i$ 为任意实数, $i = 1, 2, \dots, m$ 且 $|d| < 0.5$,则有

$$(1 - B)^d \sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} = \sum_{i=1}^m \beta_i (1 - B)^d x_{it}$$

引理2 若 $x_{it} \sim FK(d), i = 1, 2, \dots, m$, 且 $|d| < 0.5$, 则对任意的实数 $\beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$, 有 $\sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} \sim K(0)$ 或 $FK(d')$ 其中 $d' \leq d$.

证明 (a) 当 $d = 0$ 时, 有 $x_{it} \sim FK(d) = K(0)$ 根据引理1 立即可得 $\sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} \sim K(0)$. (b) 当 $d \neq 0$ 时, 若 $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T$ 存在线性协整关系, 则存在 $\beta_i \neq 0$, 使 $\sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} \sim K(0)$. 若 $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T$ 不存在线性协整关系, 则对任意的实数 $\beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$, $(1-B)^d \sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} = \sum_{i=1}^m \beta_i (1-B)^d x_{it} \sim K(0)$. 此时若存在 $d^* \leq d$ 使得 $(1-B)^d \sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} \sim K(0)$, 则可取 $d' = \min\{d^*, d\}$, 由定义1 可得 $\sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} \sim FK(d')$.

所以, 综合(a)和(b), 即可得证本引理.

注1 此引理推广了文献[7]的引理3.

引理3 对于标量时间序列 $\{x_t\}$, 若 $x_t \sim K(0)$, 且 $d \geq 0$, 则 $(1-B)^d x_t \sim K(0)$, 其中 B 为滞后算子.

证明 当 $d = 0$ 时 $(1-B)^d x_t = x_t \sim K(0)$. 当 $d \neq 0$ 时, 由条件 $x_t \sim K(0)$, 不妨设 $E[x_t] = \mu, Cov(x_t, x_{t+k}) = \gamma_k$, 其中 γ_k 与时间 t 无关, 立即可得对于任意的 $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, 有 $E[B^j x_t] = \mu$. 令 $y_t = (1-B)^d x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j B^j x_t, \varphi_j = \prod_{1 \leq k \leq j} \frac{k-1-d}{k}, j = 1, 2, \dots$, 且规定 $\varphi_0 = 1$, 则: 一方面, 有 $E[y_t] = E[\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j B^j x_t] = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j E[B^j x_t] = \mu \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j$, 由于其中的级数 $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-d-1}$ 在 $d > 0$ 时收敛, 故 $E[y_t]$ 为有限常数; 另一方面, 有 $Cov(y_t, y_{t+k}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_i \varphi_j Cov(B^i x_{t+k}, B^j x_t) = \sum_{|i-j|=k} \varphi_i \varphi_j \gamma_k = \gamma'_k$, 显然 γ'_k 与 i, j 无关. 所以有 $(1-B)^d x_t \sim K(0)$. 故本引理得证.

利用上述性质可得到以下关于向量分整时间序列的线性协整关系存在的必要条件. 在给出必要条件之前先给出以下重要结论.

定理1 若 $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T, x_{it} \sim FK(d_i), i = 1, 2, \dots, m$, 满足 $d_1 d_2 \dots d_m \neq 0$ 且 d_i 两两不等, 则对任意的实数 $\beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$, 有 $\sum_{i=1}^m \beta_i x_{it} \sim FK(\max_{1 \leq i \leq m} \{d_i\})$.

注2 此定理的结论和证明方法类似于文献[7]的定理2, 故这里证明从略.

根据定理1 立即可得下面的重要结论:

推论1 对于向量时间序列 $\{X_t\}, X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T, x_{it} \sim FK(d_i), i = 1, 2, \dots, m$, 满足 $d_1 d_2 \dots d_m \neq 0$, 若 $d_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 两两不等, 则 X_t 不存在线性协整关系.

根据推论1, 立即可得下面关于向量分整时间序列的线性协整关系存在的必要条件.

定理2 设 m 维向量分整时间序列为 $\{X_t\}, X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T, x_{it} \sim FK(d_i), i = 1, 2, \dots, m, \{X_t\}$ 存在线性协整关系的必要条件为: 至少存在2个整数 i 和 j , 使得 $d_i = d_j$.

2 向量分整时间序列的非线性协整关系

张喜彬等^[6]针对整数阶时间序列给出了广义协整的概念. 本文首先将广义协整的概念推广到广义分整协整, 然后在此基础上给出非线性协整关系存在的充分条件, 并给出非线性协整函数的表达式, 最后给出得到此表达式的一个算法.

设 m 维向量时间序列 $\{X_t\}, X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T$, 其分量序列 $x_{it} \sim FK(d_i), |d_i| < 0.5, i = 1, 2, \dots, m$. 令 $d_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$, 定义差分变换矩阵

$$D(B) = \begin{bmatrix} (1-B)^{d_1-d_0} & & & \\ & (1-B)^{d_2-d_0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-B)^{d_m-d_0} \end{bmatrix} \tag{1}$$

引理 4 若对 $\{X_t\}$ 进行式 (1) 的差分变换, 得到的向量序列 $Y_t = D(B)X_t$, 记为 $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})^T$, 则 $y_{it} \sim FK(d_0)$, 对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 其中 $d_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$.

证明 通过差分变换得

$$Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})^T = D(B)X_t = [(1-B)^{d_1-d_0} \quad (1-B)^{d_2-d_0} \quad \dots \quad (1-B)^{d_m-d_0}]^T X_t$$

从而, 对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有

$$(1-B)^{d_0} y_{it} = (1-B)^{d_0} (1-B)^{d_i-d_0} x_{it} = (1-B)^{d_i} x_{it} \sim K(0)$$

另外, 假设存在 $d^* < d_0$, 使得 $(1-B)^{d^*} y_{it} \sim K(0)$. 由于

$$(1-B)^{d^*} y_{it} = (1-B)^{d^*} (1-B)^{d_i-d_0} x_{it} = (1-B)^{d_i-(d_0-d^*)} x_{it}$$

所以 $(1-B)^{d_i-(d_0-d^*)} x_{it} \sim K(0)$ 其中 $d_i-(d_0-d^*) > 0$, 与 $x_{it} \sim FK(d_i)$ 矛盾. 所以 $y_{it} \sim FK(d_0)$ 对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. 故本引理得证.

在上述引理的基础上, 可以给出下面广义分整协整的定义.

定义 3 设 m 维向量时间序列为 $\{X_t\}$, $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})^T$, 其中 $x_{it} \sim FK(d_i)$, $|d_i| < 0.5, i = 1, 2, \dots, m$. 令 $d_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$. 若存在 m 维向量 α 和 m 阶差分矩阵 $D(B)$, 使得 $\alpha^T D(B)X_t \sim K(0)$, 则称向量 $\{X_t\}$ 存在广义分整协整关系, 其中 $(\alpha^T D(B))^T$ 称为广义分整协整向量, 记为 $\alpha(B)$, 即 $\alpha(B) = (\alpha^T D(B))^T$.

注 3 (a) 这里的广义分整协整关系, 准确地说应是一种广义分整线性关系. (b) 对于上面的差分矩阵, 当 $d_1 = d_2 = \dots = d_m$ 时, $D(B) = I_m$ (m 维单位阵), 此时 $Y_t = X_t$, 相当于没有对向量时间序列 $\{X_t\}$ 进行差分变换. 此时的广义分整协整关系就表现为文献 [7] 关于分数阶时间序列的线性协整关系. 所以, 广义分整协整关系是文献 [7] 给出的分整线性协整关系的推广. (c) 广义分整协整向量 $\alpha(B)$ 的每一列都是关于滞后算子 B 的多项式.

由于上述定义中的向量 α 可能有多个, 从而广义协整关系可能有多个. 同样, 可定义广义分整协整的秩为满足上述定义的线性无关的向量 α 的个数.

基于广义分整协整的定义, 下面讨论向量分整序列的非线性协整关系.

定理 3 设向量分整序列 $\{X_t\} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}\}^T$, $x_{it} \sim FK(d_i)$, $|d_i| < 0.5, i = 1, 2, \dots, m$. 若 $\{X_t\}$ 存在广义分整协整关系, 则其必存在非线性协整关系, 且 $\{X_t\}$ 的非线性协整函数为 $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha(B) \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, 其中 $\alpha(B)$ 为 $\{X_t\}$ 的广义分整协整向量.

证明 若 $\{X_t\}$ 存在广义分整协整关系, 记 $d_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$, 则对 $\{X_t\}$ 进行差分变换 $Y_t = D(B)X_t$, 根据引理 4, 必有 $y_{it} \sim FK(d_0)$ 对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 且存在 m 维广义分整协整向量 $\alpha(B)$, 使得 $\alpha(B)^T Y_t \sim K(0)$ 其中 $\alpha(B) = (\alpha^T D(B))^T$. 此处向量 α 为 m 维向量, $D(B)$ 为 m 阶差分矩阵. 即存在非线性函数

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \alpha(B) \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$$

使得 $\mathcal{F}(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}) = \alpha(B)^T X_t \sim K(0)$. 故本定理得证.

注 4 (a) 当对序列 $\{Y_t\}$ 通过最小二乘法估计残差序列得到广义分整协整关系的向量参数 α 时, 本定理就是文献 [7] 的定理 2 和定理 5, 即文献 [7] 的定理 2 和定理 5 为此定理的一个特例. (b) 事实上, 非线性函数的具体形式为 $\mathcal{F}(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}) = \alpha(B)^T X_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_j B^j x_{it}$ 其中 $\varphi_j = \prod_{1 \leq k \leq j} \frac{k-1-d_i+d_0}{k}, j = 1, 2, \dots$, 且规定 $\varphi_0 = 1$.

利用上面的定理, 针对具有长记忆性质的向量分整时间序列, 给出如下一种寻求 m 维向量分整时间序列 $\{X_t\}$ 的非线性协整关系的算法.

a. 利用 R/S 分析法求出 $\{X_t\}$ 的每个分量序列 $\{x_{it}\}$ 的 Hurst 指数 $H^{[5,8]}$ 根据分维数与 H 的关系 $d = H - 0.5$ 求出 $d_i, i = 1, 2, \dots, m$, 并计算出 $d_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{d_i\}$.

b. 计算差分变换矩阵 $D(B)$, 并利用 $D(B)$ 对 $\{X_t\}$ 进行差分变换得到向量序列 $\{Y_t\}$, 对 $\{Y_t\}$ 利用 OLS 进行线性回归得 $y_{mt} = a + \sum_{i=1}^{m-1} \hat{\beta}_i y_{it}$. 若残差 $e_t \sim K(0)$, 则 $\{X_t\}$ 的广义分整协整关系的向量参数 $\alpha = (-\hat{\beta}_1, -\hat{\beta}_2, \dots, -\hat{\beta}_{m-1}, 1)^T$.

c. 得到 $\{X_t\}$ 的非线性协整函数关系为 $f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}) = \alpha(B)'X_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_j B^j x_{it}$, 其中 $\varphi_j =$

$$\prod_{1 \leq k \leq j} \frac{k-1-d_i+d_0}{k}, j=1, 2, \dots, \text{且规定 } \varphi_0 = 1.$$

3 结 束 语

本文给出了向量分整时间序列的线性协整关系存在的必要条件和非线性协整关系存在的一个充分条件,并结合 Hurst 指数给出了具体的算法,因此本文结果具有一定的理论和应用价值。

关于向量分整时间序列的协整关系研究,特别是非线性协整关系的研究,还有待进一步加强。非线性协整关系研究的关键在于找出具体的非线性协整函数。虽然已有部分研究可以利用神经网络来判断和给出协整函数^[3],但利用神经网络训练给出的函数往往特别复杂且不易精确表示,因此非线性协整函数的具体表示形式是一个值得探讨的问题。另外,非线性协整关系的误差修正模型和统计检验也有待进一步研究。

参考文献:

- [1] ENGLE R F, GRANGER C W J. Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing[J]. *Econometrica*, 1987, 55(2): 251-276.
- [2] 程细玉, 张世英. 向量分整序列的非线性协整研究[J]. *系统工程理论方法应用*, 2001, 10(1): 85-87.
- [3] 张喜彬, 张世英, 杨宝臣. 非线性协整关系及其检验方法研究[J]. *系统工程学报*, 1999, 14(1): 57-68.
- [4] PETERS E. *Chaos and order in the capital markets*[M]. New York: John Wiley&Sons, 1991.
- [5] PETERS E. *Fractal marker analysis: applying chaos theory to investment and economics*[M]. New York: John Wiley&Sons, 1994.
- [6] 张喜彬, 张世英, 杨宝臣. 具有高阶单整分量的协整系统[J]. *系统工程学报*, 1997, 12(4): 101-104.
- [7] 程细玉, 张世英. 向量分整时间序列的协整研究[J]. *系统工程学报*, 2000, 15(3): 253-257.
- [8] HURST H E. The long-term storage capacity of reservoir[J]. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951, 116: 770-808.

Research on cointegration for vector fractional integration time series

CAO Guang-xi

(Business School, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract Some properties of cointegration for vector fractional integration time series were presented, and a necessary condition for the linear cointegration was given. Then, the concept of integer-order generalized cointegration was extended to that of fraction-order. Based on the definition of generalized fractional cointegration, a sufficient condition for the existence of nonlinear cointegration for vector fractional integration time series was obtained, and a specific nonlinear function form was derived. Combining with R/S analysis, a practical algorithm for judgment of the nonlinear cointegration was worked out.

Key words long memory; fractional integration; nonlinear cointegration; generalized fractional cointegration