

直交非线性互补问题的区间算法

王海鹰,董祖引

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要:讨论了一般的直交非线性互补问题(VNCP): $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f^T(x)g(x) = 0$. 构造了一种改进的 Krawczyk 区间算子,给出了求解 VNCP 问题的区间算法.该算法可检验任一区间中是否存在 VNCP 问题的解.若存在 VNCP 问题的解,用该算法可以求出 VNCP 问题在该区间中的所有解,并可得到包含 VNCP 问题解的区间宽度足够小的子区间.

关键词:非线性互补问题;直交非线性互补问题;Krawczyk 区间算子;区间斜率算子

中图分类号: O221 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-198X(2006)04-0473-04

设 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个连续函数,非线性互补问题(NCP)是求一个向量 $x \in \mathbb{R}^n$,使得

$$x \geq 0, g(x) \geq 0, x^T g(x) = 0 \quad (1)$$

NCP 问题(1)是许多工程 and 经济学中的一种重要的数学模型.此外,在最优化理论中,对于最优点的一个必要条件亦可以转化为 NCP 问题^[1].文献[2~5]等讨论了 NCP 问题的算法,本文则考虑更一般的直交非线性互补问题(VNCP): $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 2 个连续函数,求一个向量 $x \in \mathbb{R}^n$,使得

$$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f^T(x)g(x) = 0 \quad (2)$$

显然,当 $f(x) = x, g(x) = Mx + q, M \in \mathbb{R}^{n \times n}, q \in \mathbb{R}^n$ 时,该问题为线性互补问题(LCP),而当 $f(x) = x$ 时,该问题为 NCP 问题(1),故 LCP 问题和 NCP 问题均是 VNCP 问题(2)的特殊情形.与 LCP 问题和 NCP 问题相比,VNCP 问题(2)的处理要困难得多.例如,文献[6]中参数 t_i 的求解是一个线性规划问题,而 VNCP 问题中出现了 α_i, β_i 等参数,它们的求解是一个非线性规划问题,因此求解就更加困难.为方便求解,本文对参数 α_i, β_i 进行了改进,从而得到了 VNCP 问题(2)的一种更可行的区间算法.文中 $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{X} \leq x \leq \bar{X}\}$ 表示一个多维区间, $m(X)$ 表示 X 的中点.

1 直交非线性互补问题的区间算法

VNCP 问题(2)可以等价地转化为非线性方程

$$F(x) = \min(f(x), g(x)) = 0 \quad (3)$$

其中 $\min$ 按分量考虑.对于函数 F ,即使 f, g 为连续可微函数,它在任一区间上也不可微.对于非可微的系统(3),本文给出一个可计算的区间算子.使用这个区间算子,则可以检验并确定 VNCP 问题(2)在任一区间上的解是否存在.若存在,则可由一个区间迭代求出 VNCP 问题在该区间中的所有解,并可得到包含问题(2)精确解区间宽度足够小的子区间.为此,构造 F 在广义意义下的区间斜率 δF ,记为 $\delta F(x, X)$.这样,改进的 Krawczyk 区间算子^[7]为

$$K(x, A, X) = x - A^{-1}F(x) + (I - A^{-1}\delta F(x, X))(X - x) \quad (4)$$

其中 A 是一个适当的 $n \times n$ 非奇异矩阵,并有如下引理.

引理 1^[7] 设 $K(x, A, X)$ 由式(4)定义,则有 (a) 如果 $x^* \in X$ 是式(3)的解,则 $x^* \in K(x, A, X)$; (b) 如果 $K(x, A, X) \cap X = \emptyset$,则在 X 中没有式(3)的解; (c) 若存在 $x \in X$ 和非奇异矩阵 A ,使得 $K(x, A, X) \subseteq X$,则在 X 中必有式(3)的解.

为了得到 Krawczyk 区间算子,先定义 F 的斜率 $\delta F(x, y)$,即对于固定的 $x \in X$,

$$F(x) - F(y) = \delta F(x, y) \text{ } x - y \quad (5)$$

在此设 f, g 连续可微, 因此 $\delta f(x, y), \delta g(x, y)$ 存在且意义如式(5)所示. 记 $D_i^+ = \{x \in X \mid g_i(x) > f_i(x)\}$, $D_i^- = \{x \in X \mid g_i(x) < f_i(x)\}$, $D_i^0 = \{x \in X \mid g_i(x) = f_i(x)\}$, $\forall x, y \in X$ 定义

$$\delta F_i(x, y) = \begin{cases} \delta f_i(x, y), & x \in D_i^+ \cup D_i^0, y \in D_i^+ \cup D_i^0; \\ \delta g_i(x, y), & x \in D_i^- \cup D_i^0, y \in D_i^- \cup D_i^0; \\ (\alpha_i(\delta g_i - \delta f_i) + \delta f_i)|_{(x, y)}, & x \in D_i^+, y \in D_i^-; \\ (\beta_i(\delta g_i - \delta f_i) + \delta f_i)|_{(x, y)}, & x \in D_i^-, y \in D_i^+. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\alpha_i = \frac{(f(y) - g(y))_i}{(g(x) - f(x) + f(y) - g(y))_i}$, $\beta_i = \frac{(g(x) - f(x))_i}{(g(x) - f(x) + f(y) - g(y))_i}$.

引理2 设 $\delta F(x, y)$ 的第 i 行由式(6)确定, 则 $\forall x, y \in X$, 有 $F(x) - F(y) = \delta F(x, y) \text{ } x - y$.

这样, F 的斜率 $\delta F(x, y)$ 由式(6)确定. 另外, 由 α_i, β_i 的定义易得 $\alpha_i \in (0, 1), \beta_i \in (0, 1)$. 下面定义 F 的区间斜率算子 $\delta F(x, X)$. 设对于固定的 $x \in X$ 和所有 $y \in X$, f, g 均存在相应的区间斜率算子 $\delta f(x, X), \delta g(x, X)$.

对于固定的 $x \in X$ 及 $i = 1, 2, \dots, n$, 考虑非线性规划问题

$$\begin{cases} \max (g_i(y) - f_i(y)) \\ \text{s.t. } y \in X \end{cases} \quad (7)$$

和

$$\begin{cases} \min (g_i(y) - f_i(y)) \\ \text{s.t. } y \in X \end{cases} \quad (8)$$

设 $y^{i,1}$ 和 $y^{i,2}$ 分别是式(7)和式(8)的解, 令

$$\alpha_i = \frac{(f(y^{i,2}) - g(y^{i,2}))_i}{(g(x) - f(x) + f(y^{i,2}) - g(y^{i,2}))_i}, \quad \beta_i = \frac{(g(x) - f(x))_i}{(g(x) - f(x) + f(y^{i,1}) - g(y^{i,1}))_i}$$

上式如分母为零, 则令 $\alpha_i = 1, \beta_i = 0$. 现在定义区间算子, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\delta F_i(x, X) = \begin{cases} \delta f_i(x, X) & (y^{i,2} \in D_i^+ \cup D_i^0) \\ \delta g_i(x, X) & (y^{i,1} \in D_i^- \cup D_i^0) \\ [0, \alpha_i \text{ } \delta g_i(x, X) - \delta f_i(x, X)) + \delta f_i(x, X) & (x \in D_i^+ \cup D_i^0, y^{i,2} \in D_i^-) \\ [\beta_i, 1 \text{ } \delta g_i(x, X) - \delta f_i(x, X)) + \delta f_i(x, X) & (x \in D_i^-, y^{i,1} \in D_i^+) \end{cases} \quad (9)$$

下面先证明式(9)所定义的区间算子是 F 的区间斜率算子 $\delta F(x, X)$, 然后再提出改进的方法.

定理 对于给定的 $x \in X$ 及 $i = 1, 2, \dots, n$, 设 $\delta F(x, X)$ 的第 i 行由式(9)确定, 则有

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x, X) \text{ } x - y \quad (\forall y \in X)$$

证明 对于 $x \in X$ 及 $i = 1, 2, \dots, n$, 若 $x \in D_i^+ \cup D_i^0, y^{i,2} \in D_i^-$, 分2种情形讨论:

a. 若 $y \in D_i^+ \cup D_i^0$, 则显然成立.

b. 若 $y \in D_i^-$, 由引理2得

$$F(x) - F(y) = f_i(x) - g_i(y) = \left(\frac{(f(y) - g(y))_i}{(g(x) - f(x) + f(y) - g(y))_i} (\delta g_i(x, y) - \delta f_i(x, y)) + \delta f_i(x, y) \right) (x - y)$$

由于 $y^{i,2}$ 是式(8)的最优解, 所以

$$0 < \frac{(f(y) - g(y))_i}{(g(x) - f(x) + f(y) - g(y))_i} \leq \frac{(f(y^{i,2}) - g(y^{i,2}))_i}{(g(x) - f(x) + f(y^{i,2}) - g(y^{i,2}))_i} = \alpha_i$$

$$F(x) - F(y) \in ([0, \alpha_i \text{ } \delta g_i(x, X) - \delta f_i(x, X)) + \delta f_i(x, X)] \text{ } x - y = \delta F_i(x, X) \text{ } x - y$$

其他情形可用类似方法验证. 要确定出参数 α_i, β_i , 必须求解非线性规划问题(7)和(8), 而非线性规划问题的求解是很困难的. 为避免求解非线性规划问题(7)和(8), 也可考虑如下区间算子:

$$G(x, X) = [0, 1 \text{ } \delta g(x, X) - \delta f(x, X)) + \delta f(x, X)$$

显然有 $\delta F(x, X) \subseteq G(x, X)$, 因此 $F(x) - F(y) \in G(x, X) \text{ } x - y, \forall x, y \in X$. 但由此带来了较大的超宽

度的区间,会影响计算速度.为了缩小由此产生的超宽度又避免求解非线性规划问题(7)和(8),考虑改进 F 的区间斜率算子.为此,设 f, g 的区间扩张为 $f(X), g(X)$,记 $g(X) - f(X) = [\underline{Q}(X), \overline{Q}(X)]$.现定义区间算子 $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\delta \tilde{F}(x, X) = \begin{cases} \delta f(x, X) & (Q(X) \in D_i^+ \cup D_i^0) \\ \delta g(x, X) & (Q(X) \in D_i^- \cup D_i^0) \\ [0, \tilde{\alpha}_i] \delta g(x, X) - \delta f(x, X) + \delta f(x, X) & (x \in D_i^+ \cup D_i^0, Q(X) \in D_i^-) \\ [\beta_i, 1] \delta g(x, X) - \delta f(x, X) + \delta f(x, X) & (x \in D_i^-, Q(X) \in D_i^+) \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \frac{-(Q(X))_i}{(g(x) - f(x) - Q(X))_i}$, $\tilde{\beta}_i = \frac{(g(x) - f(x))_i}{(g(x) - f(x) - Q(X))_i}$.

这样,由参数 $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ 的定义易得不等式: $0 < \alpha_i \leq \tilde{\alpha}_i < 1, 0 < \tilde{\beta}_i \leq \beta_i < 1$. 因此,可得包含关系: $\delta F(x, X) \subseteq \delta \tilde{F}(x, X) \subseteq G(x, X)$.故定理仍成立.这样,以 $\delta \tilde{F}(x, X)$ 代替 $\delta F(x, X)$ 既可避免求解非线性规划问题(7)和(8)所带来的困难,又可减小因构造区间算子 $G(x, X)$ 增加的过大的超宽度.另外,在具体求解 VNCP 问题(2)时,可在式(4)中取 $x = m(X)$,并且若初始区间 $X^{(0)}$ 的中点 $m(X^{(0)})$ 处的广义 Fre'chet 导数 $F'(m(X^{(0)}))$ 非奇异,就取 $A = F'(m(X^{(0)}))$,记 $\delta \tilde{F}(m(X), X) = \delta F(X)$,若 $F'(m(X^{(0)}))$ 奇异,总可以在点 $m(X^{(0)})$ 的某邻域取一点,使得在该点的 Fre'chet 导数非奇异.这样, Krawczyk 区间算子为

$$K(X) = m(X) - A^{-1}F(m(X)) + (I - A^{-1}\delta F(X))(X - m(X)) \quad (11)$$

作区间迭代

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cap K(X^{(k)}) \quad (12)$$

由算法(11)及(12),当 $X^{(k)}$ 足够小时,就会有 $K(X^{(k)}) \subset X^{(k)}$ 或 $X^{(k)} \cap K(X^{(k)}) = \emptyset$,故由引理1可在 $X^{(0)}$ 中检验 VNCP 问题(2)的解是否存在.若存在,则可求出 $X^{(0)}$ 中 VNCP 问题(2)的所有解,并给出包含问题(2)精确解的区间宽度足够小的多维子区间.

2 算 例

例 设
$$\begin{cases} f_1 = 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2 \\ f_2 = 3x_1^2 + 2x_2^3 - 3x_2x_3 + x_3^2 - 3 \\ f_3 = 2x_1 + 3x_1x_2 - 2x_2^3 + 4x_3^2 + 9 \end{cases}, \begin{cases} g_1 = x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2x_3 - 3 \\ g_2 = -2x_1x_3 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 7 \\ g_3 = 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 + 2 \end{cases},$$

 $f = (f_1, f_2, f_3), g = (g_1, g_2, g_3)$,求一个向量 $x \in \mathbb{R}^3$,使得

$$f(x) \geq 0 \quad g(x) \geq 0 \quad f'(x)g(x) = 0 \quad (13)$$

解 利用区间算子(11)及区间迭代(12)进行计算,取初始区间 $X^{(0)} = ([-3, 4] [-4, 3] [-2, 5])$,当精度为 $\epsilon = 0.5 \times 10^{-4}$ 时,迭代4240次,数据库中尚有单元60个,当精度为 $\epsilon = 0.5 \times 10^{-6}$ 时,迭代5317次,数据库中尚有单元63个.每个单元都含有问题(13)的一个精确解.从计算结果可知, $X^{(0)}$ 中有问题(13)的4个解.从63个单元中选择包含4个解的子区间,取每个子区间的中点为问题(13)的近似解,则:

第13个单元, $X_1 = ([0.8825129, 0.8825133] [-2.0329890, -2.0329880] [2.1242690, 2.1242690])$, $x_1^* = m(X_1) = (0.8825132, -2.0329880, 2.1242690)$, $f(x_1^*) = (-0.0000010, 0.0000020, 4.1373800)$, $g(x_1^*) = (1.0336420, 2.1121740, -0.0000001)$;第25个单元, $X_2 = ([1.3829900, 1.3829910] [1.4608670, 1.4608670] [1.7023300, 1.7023300])$, $x_2^* = m(X_2) = (1.3829910, 1.4608670, 1.7023300)$, $f(x_2^*) = (2.7796350, 4.4106500, 0.0000006)$, $g(x_2^*) = (0.0000032, 0.0000000, 18.6734500)$;第48个单元, $X_3 = ([-1.2092670, -1.2092660] [-2.4001550, -2.4001550] [3.2765110, 3.2765120])$, $x_3^* = m(X_3) = (-1.2092670, -2.4001550, 3.2765110)$, $f(x_3^*) = (-0.0000012, 8.0615520, 0.0000001)$, $g(x_3^*) = (22.8978800, 0.0000037, 7.2864620)$;第62个单元, $X_4 = ([0.9999999, 1.0000000] [-2.0000000, -2.0000000] [2.0000000, 2.0000000])$, $x_4^* = m(X_4) = (1.0000000, -2.0000000, 2.0000000)$, $f(x_4^*) = (2.0000000, -0.0000012, 5.0000020)$, $g(x_4^*) = (-0.0000005, 3.0000020, 0.0000010)$.

从数值结果可以看出,本文所给出的算法是有效和令人满意的.

参考文献:

- [1] FERRIS M C ,PANG J S.Engineering economic applications of complementarity problem[J].SIAM Rev ,1997 ,39 :669-713.
- [2] ALEFELD G E ,CHEN X ,POTRA F A.Numerical validation of solutions of linear complementarity problems[J].Numer Math ,1999 ,83 :1-23.
- [3] CHEN X.A verification method for solutions of nonsmooth equations[J].Computing ,1997 ,58 :281-294.
- [4] 欧阳梓祥,王征宇.一类基于广义梯度的求解非线性互补问题的算法[J].高等学校计算数学学报 ,1997(4):370-377.
- [5] 乌力吉,陈国庆.非线性互补问题的一种新的光滑价值函数及牛顿类算法[J].计算数学 ,2004 ,26 :315-328.
- [6] ALEFELD G E ,GIENGER A ,POTRA F A.Efficient numerical validation of solutions of nonlinear systems[J].SIAM J Numer Anal ,1994 ,31 :252-260.
- [7] 汪海鹰,刘蕴华,张乃良.解非线性方程组的一类 Krawczyk-Moore 算法[J].河海大学学报 ,1992 ,20(6):55-62.

An interval algorithm for vertical nonlinear complementarity problems

WANG Hai-ying , DONG Zu-yin

(College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract A discussion was made on the vertical nonlinear complementarity problems (VNCPs) : $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, and $f^T(x)g(x) = 0$. An improved Krawczyk interval operator was constructed , and an interval algorithm for VNCPs was given. With the algorithm , it can be tested whether there exist solutions to VNCPs in any intervals , and all the existing solutions can be found out by the algorithm. Moreover , the subintervals with minimal width , which include the solutions to VNCPs , were also obtained.

Key words nonlinear complementarity problem ; vertical nonlinear complementarity problem ; Krawczyk interval operator ; interval slope operator

《水利经济》征订启事

双月刊 6.00 元/期 全年 36.00 元 邮发代号 28-252 单月 30 日出版

《水利经济》是中国水利经济研究会会刊,由中国水利经济研究会与河海大学共同主办,是理论与实践相结合、普及与提高相结合的综合性学术刊物。《水利经济》1983 年创刊,是中国科技核心期刊、全国水利系统优秀期刊、全国农业系统优秀期刊,是全国唯一的水利经济研究方面的专业性期刊。经国家科委批准,国内外公开发行。

主要刊登内容 水电技术与经济、生态与环境经济方面的科技政策、综合述评、研究探讨、工程技术及措施、成果推广及经验交流、专题讲座、国外动态、书刊评介、科技简讯;水资源管理、评价、优化配置、城乡供水与安全、农业经济、农业灌溉与节水技术等方面的文章。2006 年本刊将重点关注与水电有关的科学研究、生态建设领域中的水资源可持续发展研究。新增设供水安全、水土保持、城乡供水、环境治理等栏目。

主要读者对象 :与水电技术与经济、生态、环境、农业有关的工程技术、科研人员、管理干部以及大专院校师生。

订阅办法 :读者可通过邮局订阅,也可直接汇款至编辑部订阅(全年另加邮寄费 6.00 元)。

编辑部地址 :210098 南京西康路 1 号 河海大学

联系电话 (025) 83786350 **联系人** :王海

传真 (025) 83787381 **E-mail** :jj@hhu.edu.cn