

三维非定常不可压 N-S 方程一个高精度求解格式

钱建华^{1 2}, 陆昌根^{1 2}, 曹卫东²

(1. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098 ;

2. 河海大学环境科学与工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 :对三维、非定常、不可压 Navier-Stokes 方程提出了一种新的数值计算方法. 在时间离散上应用 3 阶精度混合显-隐相结合的分裂格式, 空间离散在 x 及 y 轴向采用非等间距网格的紧致有限差分格式与 z 向应用 Fourier 谱展开相杂交的数值方法逼近. 经平板边界层流的验证表明, 该算法具有计算精度高、稳定性好、收敛速度快等特点. 同时也研究了三维、非定常流体运动下游边界问题, 提出了无反射出流边界条件, 以减少在有限计算区域内人工出流边界反射引起的数值误差, 保证直接数值模拟的精度和准确性. 该算法的提出对于求解边界层、射流及混合层等流动中的转捩与演化问题具有重要的理论意义.

关键词 :Navier-Stokes 方程; 非等间距网格; 紧致有限差分; Fourier 谱展开

中图分类号 :V211.1.3 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2006)05-0513-05

为了精确地数值模拟流体力学中一些复杂而精细的物理现象, 非等间距高精度紧致有限差分格式^[1]的研究和应用日益受到人们的普遍重视. 早期的直接数值模拟一般使用谱方法. 谱方法具有理论上的无穷精度, 非常适合于捕捉小尺度的物理量. 同时由于各种快速正交变换算法的出现和发展成熟, 使得谱方法在数值模拟中发挥了较高的效率. 到目前为止, 该方法仍然是湍流与流动转捩等问题的主要研究手段之一. 但谱方法的适用范围非常有限, 仅适用于具有周期性边界的物理流动问题, 而且谱方法计算时会产生震荡, 造成混淆误差, 直接影响数值计算的稳定性, 所以, 用谱方法计算时往往必须采取措施抑制混淆误差. 与谱方法相比, 有限差分法具有方法简单、边界条件处理灵活方便等优点. 尤其是近几年流行的紧致有限差分, 具有高精度、低色散性及耗散性能小等特点, 在湍流和流动转捩问题的直接数值模拟中应用广泛^[2-5]. 过去的紧致有限差分大都基于均匀网格, 而对于变间距网格通常采用 Jacobian 变换将其变成均匀网格, 这会造成物理区域中网格变换剧烈的局部区域的较大误差.

为有效避免误差, 合理反映真实的流体运动, 本文将在 x 和 y 轴向导数项分别构造非等间距网格的紧致有限差分, 对非线性项采用非等间距网格的迎风紧致有限差分逼近. 该格式不但具有稳定性好、混淆误差小和收敛精度高等优点, 而且还可根据具体流体运动的特点, 在 x 和 y 轴向灵活地在流动变化剧烈的局部区域空间加密网格, 客观地展现流体运动特性. 将 x, y 轴向空间导数采用非等间距网格紧致有限差分, 和 z 向空间导数应用 Fourier 谱展开相杂交的方法逼近. 时间离散应用 3 阶精度混合显-隐相结合的分裂格式^[6], 得到三维、非定常、不可压 Navier-Stokes 方程的高效数值算法. 同时提出的三维、非定常无反射出流边界条件, 对于求解边界层、射流及混合层等流动中的演化问题具有普遍意义, 且为深入开展湍流与流动转捩等研究提供了有效的直接数值模拟方法.

1 基本方程和数值方法

1.1 基本方程

直接数值模拟的基本方程是无量纲的 Navier-Stokes 方程和连续方程:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

式中: $\mathbf{u}$ ——速度; p ——压力; ∇ ——梯度算子; ∇^2 ——拉普拉斯算子; Re ——雷诺数.

1.2 数值方法

1.2.1 时间分裂法

对时间导数离散, 采用3阶精度混合显-隐相结合的分裂格式^[6], 具体离散过程为

$$\frac{\mathbf{u}' - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{u}^{n-q}}{\Delta t} = - \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [(\mathbf{u}^{n-q} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-q}] \quad (2)$$

$$\frac{\mathbf{u}'' - \mathbf{u}'}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (3)$$

$$\frac{\gamma_0 \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}''}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}' = \{u', v', w'\} \quad \mathbf{u}'' = \{u'', v'', w''\}$$

式中: $\mathbf{u}', \mathbf{u}''$ ——中间速度场; J_i, J_e ——格式精度的参数; $\alpha_q, \beta_q, \gamma_0$ ——适当权数, 即 $J_i = 3, J_e = 3, \gamma_0 = 11/6, \alpha_0 = 3, \alpha_1 = -3/2, \alpha_2 = 1/3, \beta_0 = 3, \beta_1 = -3, \beta_2 = 1$.

1.2.2 空间离散

基本方程(2)~(4)中空间导数的离散格式为: x, y 轴向空间导数用非等间距网格的紧致有限差分法和 z 向空间导数用 Fourier 谱展开相杂交的方法逼近.

a. 非线性项. 在控制方程(2)的右端 $(\mathbf{u}^{n-q} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-q}$ 非线性项中 $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial y$ 偏导数项均采用5阶精度变间距网格的迎风紧致有限差分格式逼近. 仅以 $\partial/\partial x$ 为例, 推导如下.

当 $u > 0$ 时, u' 满足(内点):

$$\alpha_i u'_{i-1} + u'_i = A_i u_{i-2} + B_i u_{i-1} + C_i u_i + D_i u_{i+1} + E_i u_{i+2} \quad (5)$$

式中 $\alpha_i, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ 仅与网格间距有关. 令 $h_1 = x_{i-1} - x_{i-2}, h_2 = x_i - x_{i-1}, h_3 = x_{i+1} - x_i, h_4 = x_{i+2} - x_{i+1}$. 对式(5)在 i 点进行泰勒展开, 比较对应项系数可得系数方程组:

$$\left. \begin{aligned} A_i + B_i + C_i + D_i + E_i &= 0 \\ -((h_1 + h_2)/h_3)A_i - h_2/h_3 B_i + h_3/h_3 D_i + (h_3 + h_4)/h_3 E_i - 1/h_3 \alpha_i &= 1/h_3 \\ ((h_1 + h_2)/h_3)^2 A_i + (h_2/h_3)^2 B_i + (h_3/h_3)^2 D_i + ((h_3 + h_4)/h_3)^2 E_i + 2(h_2/h_3)/h_3 \alpha_i &= 0 \\ -((h_1 + h_2)/h_3)^3 A_i - (h_2/h_3)^3 B_i + (h_3/h_3)^3 D_i + ((h_3 + h_4)/h_3)^3 E_i - 3(h_2/h_3)^3/h_3 \alpha_i &= 0 \\ ((h_1 + h_2)/h_3)^4 A_i + (h_2/h_3)^4 B_i + (h_3/h_3)^4 D_i + ((h_3 + h_4)/h_3)^4 E_i + 4(h_2/h_3)^4/h_3 \alpha_i &= 0 \\ -((h_1 + h_2)/h_3)^5 A_i - (h_2/h_3)^5 B_i + (h_3/h_3)^5 D_i + ((h_3 + h_4)/h_3)^5 E_i - 5(h_2/h_3)^5/h_3 \alpha_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

当 $u < 0$ 时, u' 满足(内点):

$$\beta_i u'_i + \beta_i u'_{i-1} = A_i u_{i-2} + B_i u_{i-1} + C_i u_i + D_i u_{i+1} + E_i u_{i+2} \quad (7)$$

式中 $\beta_i, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ 仅与网格间距有关, 其系数确定参照式(6).

对于边界点和邻近边界点采用降低精度逼近. 根据文献[7]可知, 数值逼近对整体结果影响较小.

b. 压力项. 对控制方程(3)求散度, 得压力 p 满足 Helmholtz 方程. 2阶偏导数采用5点中心差分格式(内点)离散. 以 $\partial^2/\partial x^2$ 为例, 表达式为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = A_i p_{i-2} + B_i p_{i-1} + C_i p_i + D_i p_{i+1} + E_i p_{i+2} \quad (8)$$

其中 A_i, B_i, C_i, D_i, E_i 仅与网格间距有关, 其具体推导参照式(6).

c. 散度项:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = f \quad (9)$$

对式(9) $\partial u'/\partial x$ 及 $\partial v'/\partial y$ 的偏导数项采用6阶精度变间距网格的中心紧致有限差分格式, z 变量采用 Fourier 谱展开的方法进行数值模拟. 具体推导与式(6)类似.

d. 黏性项.对方程(4)中的 z 变量采用 Fourier 谱展开.考虑到雷诺数 Re 都比较大,令 $b = m^2 \beta^2, s = \frac{\Delta t}{Re \gamma_0}$,则式(4)可近似改写成

$$\left(1 - \frac{s}{1 + sb} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{s}{1 + sb} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \mathbf{u}_m^{n+1} = \frac{\mathbf{u}_m^{n+1}}{\gamma_0(1 + sb)} \tag{10}$$

将式(10)改写为通式:

$$\left(1 - H \frac{\partial^2}{\partial h^2}\right) \Phi = G \tag{11}$$

对式(11)采用 5 阶精度的对称紧致有限差分格式逼近:

$$\alpha_i \Phi''_{i-1} + \Phi''_i + \beta_i \Phi''_{i+1} = A_i \Phi_{i-2} + B_i \Phi_{i-1} + C_i \Phi_i + D_i \Phi_{i+1} + E_i \Phi_{i+2} \tag{12}$$

式中 $\alpha_i, \beta_i, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ 仅与网格间距有关,其具体推导参照式(6).

2 无反射出流边界条件

有关出流边界条件的研究已经很多,尤其是不可压缩流动.但是,对于直接数值模拟的有限计算区域,出流边界的选定可能引起小扰动波向上游传波,以致严重影响整个计算区域内的数值计算精度.从理论上来说,数值计算区域下游出流边界应取在无穷远处,而实际计算区域的流向长度不可能取无限长,因此在有限计算区域内下游出流边界可能产生非物理现象的反射,从而影响整个计算区域的精度.这种人为造成的误差始终存在甚至相当严重,所以有必要设计一种新的无反射出流边界条件,以尽量减少在有限计算区域内人工出流边界反射引起的数值误差,保证直接数值模拟的精度和准确性.根据文献[8]的研究,基于扰动波的传播特性、波动方程的性质以及流体运动方程和动力学规律,整理得三维无反射出流边界条件的控制方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \tag{13}$$

对于无反射出流边界条件的控制方程(13)的直接数值模拟,可仿效方程(1)的数值方法逼近.

3 算例

以二维平板边界层为物理模型,令每个展向(z)截面上的流场等同于二维平板边界层的流场,得三维基本流场,从而验证三维、非定常、不可压 Navier-Stokes 方程数值计算方法的计算精度、稳定性、收敛速度、可靠性及无反射出流边界条件的合理性和可靠性等.计算区域为 $:L_x \times L_y \times L_z = 80 \times 2 \times 4$,雷诺数 $Re = U_\infty \delta / \nu = 2900$ (无穷远来流速度 U_∞ 为特征速度,下游边界层厚度 δ 为特征长度, ν 为流体运动黏性系数).计算网格点数为 $(N_x, N_y, N_z) = (ii, jj, kk) = (150, 100, 32)$,计算时间步长为 0.02.

流向 x 和法向 y 所在网格点坐标变换通用表达式为

$$\alpha(i) = L \frac{1 - \tanh \frac{a(ii/2 - i/2)}{b}}{\tanh b - \alpha(ii - i)/ii} \quad c = L \frac{1 - \tanh \frac{a \times ii}{2(ii - 1)}}{\tanh b} \tag{14}$$

当 $0 \leq i \leq ii, a = 1.25, b = 1.0, L = L_x$ 时, $\alpha(i)$ 为流向网格点坐标;当 $0 \leq i \leq jj, a = 4, b = 2.0, L = L_y$ 时, $\alpha(i)$ 为法向网格点坐标.

在数值计算中,上游边界条件为平板边界层的 Blasius 解;下游边界条件为平板边界层的 Blasius 解与无反射出流边界条件;展向 z 边界条件为周期性边界条件;平板边界层的壁面边界条件为 $u = v = w = 0$;平板边界层外缘边界条件为 $\partial u / \partial y = \partial v / \partial y = \partial w / \partial y = 0$;压力边界条件为上游与下游边界条件 $\partial p / \partial x = 0$;边界层壁面与外缘边界条件为 $\partial p / \partial y = 0$.

用以上直接数值模拟的方法求解三维、非定常、不可压 Navier-Stokes 方程,获得层流平板边界层的数值解.

a. 层流平板边界层下游出流边界条件为第一类边界条件(即平板边界层的 Blasius 解),求解得到的数值结果显示,在不同时间同一空间点上,流向和法向速度数值解几乎保持不变,最大误差大约在 10^{-6} 量级,可认为该流场定常流动.该数值结果与边界层的 Blasius 解析解相比较,发现本文的数值解与 Blasius 解析解几乎相等,最大误差大约在 10^{-5} 量级,说明本文的直接数值模拟方法是合理可行的.该算例在普通计算机上计

算,所需计算时间大约 20 h,即收敛速度快,具体结果如表 1 所示.

b. 层流平板边界层下游出流边界条件为无反射出流边界条件,在不同时刻,流向速度的数值解随 y 坐标的变化与边界层 Blasius 解析解相比较几乎不变,最大误差大约在 10^{-4} 量级,且在不同时间同一空间点上,流向速度数值解也几乎保持不变,即具有定常性.该算例在普通计算机上计算,所需计算时间大约为 24 h,即收敛速度也较快.具体数值结果见图 1.

从表 1 和图 1 的结果可知,本文提出的直接数值模拟方法不仅具有计算精度高、稳定性好、收敛速度快等特点,而且下游出流边界的非物理反射影响小.该出流边界条件是一种合理可行的无反射出流边界条件.

表 1 流向速度和法向速度的直接数值解与 Blasius 解析解比较($z=0.0$)

Table 1 Comparison of streamwise and vertical velocity numerical results with Blasius analytic solution($z = 0.0$)						
时间坐标		(u, v)				
		$x = 30.3162, \quad y = 0.04768$		$x = 30.3162, \quad y = 0.518$		$x = 30.3162, \quad y = 2.19444$
$t = 100$	(0.029 513 225 1, 0.000 001 586 1)	(0.353 189 597 3, 0.000 219 390 7)		(0.995 494 924 3, 0.001 973 212 1)		
$t = 140$	(0.029 512 362 8, 0.000 001 586 8)	(0.353 181 805 4, 0.000 219 475 7)		(0.995 494 615 2, 0.001 973 706 7)		
$t = 180$	(0.029 512 169 0, 0.000 001 587 0)	(0.353 180 186 7, 0.000 219 502 5)		(0.995 494 535 2, 0.001 973 845 4)		
$t = 200$	(0.029 512 142 0, 0.000 001 587 0)	(0.353 179 971 1, 0.000 219 506 7)		(0.995 494 523 3, 0.001 973 866 3)		
Blasius 解析解	(0.029 520 792 0, 0.000 001 527 7)	(0.353 256 002 7, 0.000 219 505 4)		(0.995 515 868 0, 0.001 973 264 9)		
时间坐标		(u, v)				
		$x = 60.5423, \quad y = 0.04768$		$x = 60.5423, \quad y = 0.518$		$x = 60.5423, \quad y = 2.19444$
$t = 100$	(0.024 040 719 3, 0.000 000 857 2)	(0.288 806 689 3, 0.000 119 295 4)		(0.973 268 667 9, 0.001 507 465 7)		
$t = 140$	(0.024 039 708 9, 0.000 000 858 1)	(0.288 795 887 8, 0.000 119 287 5)		(0.973 265 243 3, 0.001 507 370 5)		
$t = 180$	(0.024 039 008 1, 0.000 000 857 3)	(0.288 786 879 8, 0.000 119 281 3)		(0.973 262 593 3, 0.001 507 515 1)		
$t = 200$	(0.024 038 669 4, 0.000 000 857 3)	(0.288 783 144 3, 0.000 119 280 6)		(0.973 261 680 6, 0.001 507 554 5)		
Blasius 解析解	(0.024 043 322 7, 0.000 000 825 3)	(0.288 831 213 3, 0.000 119 330 3)		(0.973 301 451 7, 0.001 507 904 9)		

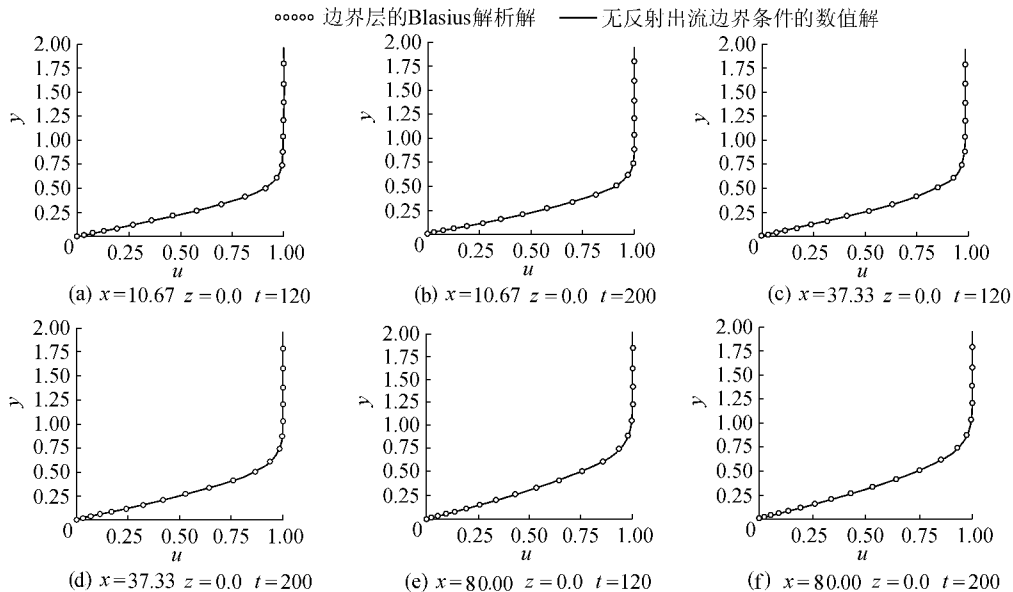


图 1 在不同截面和不同时刻流向速度随法向坐标(y)的变化规律
Fig.1 Comparison of numerical results of streamwise and vertical velocities with those of Blasius analytic solution($z=0.0$)

4 结 论

本文提出了合理可靠的下游无反射出流边界条件,建立了 x, y 轴向空间导数非等间距网格的紧致有限差分,构造了非线性项在 x, y 轴向空间导数非等间距网格的迎风紧致有限差分及 z 轴向采用 Fourier 谱展开相混合杂交的一整套直接数值模拟方法.通过平板边界层流动的物理模型数值验证了该算法具有高效性、准确性、可靠性及下游出流边界的无反射性等特点.该直接数值模拟的方法,对边界层、混合层及射流等扰动波

的演化、流动转捩及湍流机理的研究具有一定的意义.

参考文献:

- [1] 李新亮,马延文,傅德薰.不可压 N-S 方程高效算法及二维槽道湍流分析[J].力学学报,2001,33(5):577-587.
- [2] RAI M M, MION P. Direct simulations of turbulent flow using finite-differences schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1991, 96 :15-53.
- [3] LELE S K. Compact finite difference with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 103 :16-42.
- [4] FU D X, MA Y W. A high order accurate difference scheme for complex flow field[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 134 :1-15.
- [5] LU Chang-gen. Interactive study between identical coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer[J]. Journal of Hydrodynamics, Ser B, 2002, 14(1):100-105.
- [6] KARNIADAKIS G E, ISRAELI M A, ORSZAG S. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equation[J]. Journal of Computational Physics, 1991, 97 :414-443.
- [7] KIM J, MOIN P, MOSER R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number[J]. Journal Fluid Mechanics, 1987, 177 :133-166.
- [8] XIONG Zhong-min, LING Gou-can. Compact finite difference-fourier spectral method for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations[J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, 12(4):296-306.

A high accuracy scheme for 3-D unsteady incompressible N-S equations

QIAN Jian-hua^{1,2}, LU Chang-gen^{1,2}, CAO Wei-dong²

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering ,
Hohai University , Nanjing 210098 , China ;

2. College of Environmental Science and Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :A new method is worked out for numerical simulation of 3-D unsteady incompressible N-S equations. For time discretization, the third-order accuracy explicit-implicit mixed fraction scheme is employed. For spatial discretization, the compact finite difference schemes on non-uniform meshes in x and y direction are adopted with Fourier spectral expansion for numerical approximation in z direction, the spanwise direction. Numerical results of flat plate boundary laminar flow show that the present method is of high accuracy, stability and rate of convergency. Meanwhile, the downstream boundary problem for 3-D unsteady flow is studied, and a non-reflecting outflow boundary condition is put forward. The algorithm reduces the error induced by reflection from artificial outflow boundary in the limited computational region, and ensures the accuracy of direct numerical simulation. It also has important significance for numerical simulation of disturbance evolution and turbulence transition in boundary layers, jets, mixed layers, etc.

Key words :N-S equations ; non-uniform mesh ; compact finite difference ; Fourier spectral expansion