

梁长对悬臂梁振动测定材料动弹性模量的影响

吕家才,周春天,刘明明,孙小鹏

(河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

**摘要** 由悬臂梁振动测定材料动弹性模量的方法,受梁长与梁高比值的影响较为明显.选用有机玻璃和聚丙烯塑料 2 种材质,进行由悬臂梁振动测定材料动弹性模量试验.试验结果表明,只有当梁长大于或等于 5 倍梁高时,这种影响才可忽略不计.同时,当梁长大于或等于 3 倍梁宽时,对悬臂梁振动测定材料动弹性模量的影响不明显.

**关键词** 悬臂梁 振动试验 动弹性模量

**中图分类号** :TB302.3      **文献标识码** :A      **文章编号** :1000-1980(2006)05-0561-03

材料的动弹性模量是表征材料动力性能的一项重要指标,无论在结构动力分析还是结构动力模型试验中,都是重要的力学参数之一.在结构动力模型试验中,模型材料的动弹性模量不仅反映模型结构满足相似条件的状况,而且直接关系到由模型振动试验成果换算到原型结构的可靠程度.因此,研究准确测定材料动弹性模量的方法具有现实意义.

试验室测定材料动弹性模量的方法通常采用悬臂梁法<sup>[1-3]</sup>,该方法简单易行,并有明确的理论依据.因为梁的动弹性模量与梁的固有频率有关<sup>[4-7]</sup>,根据悬臂梁振动试验测得固有频率后,可方便地由式(1)计算动弹性模量<sup>[8]</sup>:

$$E_{dj} = \frac{4\pi^2 f_j^2 L^4 m}{\beta_j^4 I}$$
$$I = bh^3/12$$

(1)

式中: $E_{dj}$ ——悬臂梁第  $j$  阶固有频率对应的动弹性模量; $f_j$ ——悬臂梁第  $j$  阶固有频率; $\beta_j$ ——悬臂梁第  $j$  阶频率方程的根, $\beta_1 = 1.88, \beta_2 = 4.69, \beta_3 = 11.00, \beta_4 = 14.14$ ;  $L$ ——悬臂梁长;  $I$ ——悬臂梁横截面的惯性矩;  $b, h$ ——悬臂梁横截面的宽和高;  $m$ ——悬臂梁单位梁长的质量.

对于等截面的矩形截面悬臂梁而言,式(1)显然可改写为

$$E_{dj} = \frac{48\pi^2 f_j^2 L^4 m}{\beta_j^4 bh^3}$$

(2)

由式(2)可知, $E_{dj}$ 与悬臂梁长度  $L$ ,断面尺寸  $b, h$  和  $f_j$  直接有关,而  $f_j$  也与  $L, b, h$  有关.应该指出,式(1)事实上忽略了剪切振动的影响经试验测定  $f_j$  与  $E_{dj}$  的关系式,而剪切振动的影响只有在  $L$  与  $b$  或  $h$  比值相对较大时才可能被忽略.因此,本文将研究同质的材料悬臂梁尺寸  $L$  与  $b$  或  $h$  取何种比例范围时才不影响经试验测定并由式(1)或式(2)计算出的动弹性模量  $E_{dj}$  的值.

1 试验设计

1.1 试件材质及尺寸

试验的悬臂梁试件选用有机玻璃(PMMA)和聚丙烯(PP)塑料 2 种材质.悬臂梁为等断面变长度形式,具体断面尺寸及长度变化见表 1.

表 1 试件材质及尺寸

Table 1 Material and dimensions of test samples

| 试件材质 | 质量/<br>(g·cm <sup>-1</sup> ) | $h \times b$ /<br>(mm × mm) | 长度/mm |       |       |       |       |       |       |         |       |
|------|------------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|
|      |                              |                             | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ | $L_5$ | $L_6$ | $L_7$ | $L_8$   | $L_9$ |
| PMMA | 3.584                        | 7.7 × 40                    | 520   | 440   | 360   | 280   | 200   | 160   | 120   | 100     |       |
| PP   | 5.078                        | 7.5 × 40                    | 541   | 520   | 461   | 381   | 301   | 221   | 165   | 141 120 |       |

1.2 试验方法

PMMA 与 PP2 种材料的等断面悬臂梁分别采用 2 种固定方式,如图 1 所示.激振方向均为垂向,由于梁高  $h$  的不同,试验共分为 4 组进行.

采用敲击的方法对悬臂梁试件进行激振.

由应变计、动态应变仪、数据采集分析系统(CRAS)等组成多通道信号采集分析系统对悬臂梁试件的振动信号进行采集与处理分析,可以得到包括基频在内的悬臂梁前几阶固有频率.本次试验仅取 1 阶基频.量测分析系统框图见图 2.

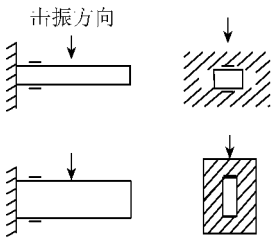


图 1 悬臂梁示意图

Fig.1 Sketch of cantilever beam

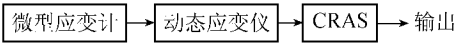


图 2 量测系统

Fig.2 Block diagram of measurement system

2 试验结果及分析

由悬臂梁振动试验取得的各悬臂梁 1 阶固有频率  $f_1$  和式(2)计算得到的 1 阶固有频率对应的材料动弹性模量  $E_{d1}$ 见表 2.  $E_{d1}$ 与  $L/h$ ,  $L/b$  的关系见表 3 和图 3.

表 2 各种试件的动弹性模量  $E_{d1}$

Table 2 Dynamic elastic modulus  $E_{d1}$  of each kind of test samples

| PMMA                                                     |                 |                     |                                                          |                 |                     | PP                                                       |                 |                     |                                                          |                 |                     |
|----------------------------------------------------------|-----------------|---------------------|----------------------------------------------------------|-----------------|---------------------|----------------------------------------------------------|-----------------|---------------------|----------------------------------------------------------|-----------------|---------------------|
| 第 1 组 $b \times h = 7.7 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ |                 |                     | 第 2 组 $b \times h = 40 \text{ mm} \times 7.7 \text{ mm}$ |                 |                     | 第 3 组 $b \times h = 7.5 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ |                 |                     | 第 4 组 $b \times h = 40 \text{ mm} \times 7.5 \text{ mm}$ |                 |                     |
| $L/\text{mm}$                                            | $f_1/\text{Hz}$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ | $L/\text{mm}$                                            | $f_1/\text{Hz}$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ | $L/\text{mm}$                                            | $f_1/\text{Hz}$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ | $L/\text{mm}$                                            | $f_1/\text{Hz}$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ |
| 520                                                      | 42.75           | 3 702.7             | 520                                                      | 7.75            | 3 303.2             | 541                                                      |                 |                     | 541                                                      | 7.0             | 4 839.6             |
| 440                                                      | 58.75           | 3 605.3             | 440                                                      | 10.75           | 3 257.5             | 520                                                      | 42.25           | 5 323.0             | 461                                                      | 9.5             | 4 700.1             |
| 360                                                      | 85.10           | 3 389.1             | 360                                                      | 16.25           | 3 283.7             | 461                                                      | 53.0            | 5 070.5             | 381                                                      | 14.0            | 4 762.9             |
| 280                                                      | 114.00          |                     | 280                                                      | 26.24           | 3 277.1             | 381                                                      | 76.7            | 5 025.8             | 301                                                      | 22.5            | 4 790.1             |
| 200                                                      | 280.00          | 3 551.9             | 200                                                      | 52.50           | 3 238.9             | 301                                                      | 124.4           | 5 210.1             | 221                                                      | 42.0            | 4 793.4             |
| 160                                                      | 425.50          | 3 304.0             | 160                                                      |                 |                     | 221                                                      | 232.6           | 5 230.6             | 165                                                      | 76.2            | 4 963.2             |
| 120                                                      | 731.70          | 3 093.2             | 120                                                      | 147.80          | 3 280.3             | 165                                                      | 370.4           | 4 122.9             | 141                                                      | 102.7           | 4 807.0             |
| 100                                                      | 952.40          | 2 525.0             | 100                                                      |                 |                     | 141                                                      | 495.5           | 3 933.9             | 120                                                      | 145.4           | 5 051.8             |

表 3 动弹性模量  $E_{d1}$ 与  $L/h$ ,  $L/b$  的关系

Table 3 Dynamic elastic modulus  $E_{d1}$  vs.  $L/h$  and  $L/b$

| PMMA                                                     |       |                     |                                                          |       |                     | PP                                                       |       |                     |                                                          |       |                     |
|----------------------------------------------------------|-------|---------------------|----------------------------------------------------------|-------|---------------------|----------------------------------------------------------|-------|---------------------|----------------------------------------------------------|-------|---------------------|
| 第 1 组 $b \times h = 7.7 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ |       |                     | 第 2 组 $b \times h = 40 \text{ mm} \times 7.7 \text{ mm}$ |       |                     | 第 3 组 $b \times h = 7.5 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ |       |                     | 第 4 组 $b \times h = 40 \text{ mm} \times 7.5 \text{ mm}$ |       |                     |
| $L/h$                                                    | $L/b$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ | $L/h$                                                    | $L/b$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ | $L/h$                                                    | $L/b$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ | $L/h$                                                    | $L/b$ | $E_{d1}/\text{MPa}$ |
| 13.0                                                     | 67.5  | 3 702.7             | 67.5                                                     | 13.0  | 3 303.2             | 13.0                                                     | 72.1  | 5 323.0             | 72.1                                                     | 13.0  | 4 839.6             |
| 11.0                                                     | 57.1  | 3 605.3             | 57.1                                                     | 11.0  | 3 257.5             | 11.5                                                     | 61.5  | 5 070.5             | 61.5                                                     | 11.5  | 4 700.1             |
| 9.0                                                      | 46.8  | 3 389.1             | 46.8                                                     | 9.0   | 3 283.7             | 9.5                                                      | 50.8  | 5 025.8             | 50.8                                                     | 9.5   | 4 762.9             |
|                                                          |       |                     | 36.4                                                     | 7.0   | 3 277.1             | 7.5                                                      | 40.1  | 5 210.1             | 40.1                                                     | 7.5   | 4 790.1             |
| 5.0                                                      | 26.0  | 3 551.9             | 26.0                                                     | 5.0   | 3 238.9             | 5.5                                                      | 29.5  | 5 230.6             | 29.5                                                     | 5.5   | 4 793.4             |
| 4.0                                                      | 20.8  | 3 304.0             |                                                          |       |                     | 4.1                                                      | 22.0  | 4 122.9             | 22.0                                                     | 4.1   | 4 963.2             |
| 3.0                                                      | 15.6  | 3 093.2             | 15.6                                                     | 3.0   | 3 280.3             | 3.5                                                      | 18.8  | 3 933.9             | 18.8                                                     | 3.5   | 4 807.0             |
| 2.5                                                      | 13.0  | 2 525.0             |                                                          |       |                     | 3.0                                                      | 16.0  | 3 996.2             | 16.0                                                     | 3.0   | 5 051.8             |

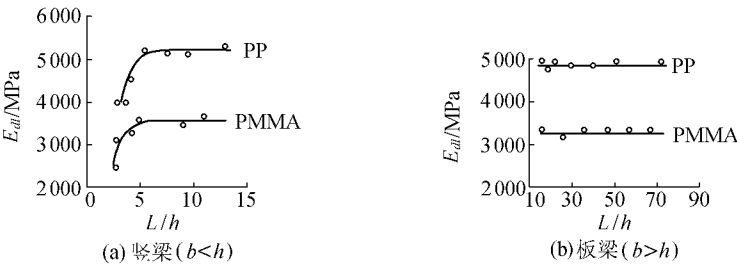


图 3 动弹性模量  $E_{d1}$ 与  $L/h$  的关系

Fig.3 Dynamic elastic modulus  $E_{d1}$  vs.  $L/h$

由图 3 及表 2 第 1,3 组试验结果表明 :当悬臂梁梁长  $L$  与梁高  $h$  之比小于 5 时,由激振试验经式(1)或式(2)计算的动弹性模量  $E_{d1}$  有明显下降 ;当  $L/h \geq 5$  时,  $E_{d1}$  基本维持在同一数值水平,变化不大.

由图 3 及表 2 中第 2,4 组试验结果表明 : $b > h$  的“板梁”,由于梁高小,当梁的实际长度较小时,由于  $L/h$  仍可维持在大于 5 的水平,因此,动弹性模量  $E_{d1}$  可基本在同一数值水平.

4 组试验结果都显示,当  $L/b \geq 3$  时,材料的动弹性模型  $E_{d1}$  受悬臂梁长度与宽度(垂直振动方向)比( $L/b$ )的影响不明显.

试验还表明,  $E_{d1}$  与悬臂梁试件断面型式( $h > b$  或  $h < b$ )有关,同材质悬臂梁  $h > b$  或  $h < b$  的试件测得的材料  $E_{d1}$  是不同的.  $h > b$  的悬臂梁试件得到的  $E_{d1}$  大于由  $h < b$  同材质悬臂梁试件测得  $E_{d1}$  的 8% 左右. 这似乎说明当  $b$  大于  $h$  较多时,“梁”的特性减弱,“板”的特性增强,  $b/h$  比值对材料  $E_{d1}$  的取值是有影响的.

### 3 结 语

模型试验表明 :由悬臂梁振动测定材料动弹性模量的方法明显受到梁长和梁高比值的影响. 只有当梁长大于或等于 5 倍梁高时,这种影响才可忽略不计. 梁长与梁宽之比即  $L/b \geq 3$  时,对悬臂梁振动测定材料动弹性模量的影响不明显.

$b/h$  比值对材料  $E_{d1}$  的具体影响范围尚待继续研究.

实际的工程结构相当复杂. 当其主要构件被视为由“梁”和“板”构成时(如水工钢闸门),在测定材料动弹性模量的悬臂梁振法试验中,建议采用梁宽大于梁高的板条形试件及梁高方向激振的方法测定材料动弹性模量,这样可得到稳定一致的材料动弹性模量均值.

### 参考文献 :

[1] 宋逸先. 试验力学基础[M]. 北京 :水利电力出版社,1987 :167-170.  
[2] 顾利忠,苏菲,赵颖,等. 用瞬态激振法测量微机械材料的弹性模量[J]. 清华大学学报 :自然科学版,2001,41(9) :126-128.  
[3] 王伯和,马功勋,桑芝富. 悬臂薄板材料常数  $E$  和的动态测试及其分析[J]. 南京化工大学学报,1994,16(2) :66-73.  
[4] 郑永来,周澄,黄炜,等. 动态弹性模量的试验研究[J]. 河海大学学报 :自然科学版,1998,26(2) :31-35.  
[5] 郑永来,周澄,黄炜,等. 动态弹性模量随频率变化的理论模型及机理[J]. 河海大学学报 :自然科学版,1999,27(3) :84-86.  
[6] 马良筠,孙海峰. 梁式构件动态弹性模量的实验研究及振动分析中梁的有效长度问题[J]. 力学学报,1989,21(11) :697-704.  
[7] 郑永来. 材料动力特性研究[D]. 南京 :河海大学,1997.  
[8] 左东启. 模型试验的理论和方法[M]. 北京 :水利电力出版社,1984 :307-308.

## Effect of beam length on determination of dynamic elastic modulus of materials by means of cantilevel beam method

LÜ Jia-cai, ZHOU Chun-tian, LIU Ming-ming, SUN Xiao-peng

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract** When the vibration test of cantilever beam samples is used for measurement of dynamic elastic modulus of materials, the influence of the ratio of beam length to beam height on the measured result can not be ignored. The measurement of the dynamic elastic modulus of two kinds of materials, i. e. organic glass and polypropylene plastic, with this method shows that the influence of the ratio can be neglected if the beam length is equal to or more than 5 times of the beam height, and that the influence of the ratio on the measured result is insignificant if the beam length is equal to or more that 3 times of the beam width.

**Key words** :cantilevel beam ; vibration test ; dynamic elastic modulus