

L -凸空间的一个极大极小不等式及应用

陆海曙¹, 唐德善², 单以红¹

(1. 河海大学商学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 运用 L -凸空间中的一个极大极小不等式, 对 L -凸空间中的抽象变分不等式和似变分不等式解的存在性, Ky Fan 型截口定理, 以及具有扰动的二人零和博弈和多人非合作博弈均衡的存在性进行研究, 从而得到没有线性结构的 L -凸空间中一些新的抽象变分不等式和似变分不等式解的存在性结果和一个 Ky Fan 型截口定理. 最后得到了一个具有扰动的二人零和博弈和一个多人非合作博弈的均衡存在性结果. 计算结果与其他相关结果相比, 条件是比较弱的.

关键词 极大极小不等式 变分不等式 Ky Fan 型截口定理 非合作博弈 零调集 集值映射

中图分类号 O177 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2006)05-0592-04

极大极小不等式在非线性分析的许多领域, 特别是在单目标和多目标非合作博弈的均衡理论、数理经济、逼近论以及不动点理论等方面都有着极为重要的作用^[1-8]. 最近, 陆海曙等^[4]在没有线性结构的 L -凸空间中得到一个关于集值映射的交定理, 并运用该定理得到许多 Ky Fan 极大极小不等式.

本文运用 L -凸空间的一个极大极小不等式来研究抽象变分不等式和似变分不等式解的存在性问题, 给出抽象变分不等式和似变分不等式解的存在性结果和一个 Ky Fan 型截口定理, 并由该极大极小不等式得到了一个具有扰动的二人零和博弈和一个多人非合作博弈均衡的存在性定理.

1 预备知识

为方便起见, 假设文中所涉及的拓扑空间都具有 Hausdorff 分离性质.

设 X 是非空集合, 用 2^X 表示 X 的所有子集族, 用 $\langle X \rangle$ 表示 X 的所有非空有限子集族, 用 $|A|$ 表示 $A \in \langle X \rangle$ 的基数. Δ_n 表示具有顶点集 $\{e_0, \dots, e_n\}$ 的 n 维标准单形. 若 J 是 $\{0, \dots, n\}$ 的非空子集, 则用 $\Delta_{|J|}$ 表示顶点集 $\{e_j: j \in J\}$ 的凸包. 若拓扑空间 X 的所有简化 Čech 同调群 $H_p(X) = 0$ (p 为有理数), 则称 X 是零调的. 特别地, 任何非空可缩空间都是零调的, 于是一个拓扑向量空间中的非空凸集或星形集也是零调的. 反之不一定成立.

定义 1^[4] 设 X 为非空集, Y 为拓扑空间, $f: X \times Y \rightarrow R$ 为一函数. 对某个 $\lambda \in R$, 若对 Y 的任意一个紧子集 C 以及对任意的 $y \in C$, $\{x \in X: f(x, y) > \lambda\} \neq \emptyset$ 蕴涵着存在一个 y 在 C 中的相对开邻域 $N(y)$ 和一个点 $x' \in X$, 使得 $f(x', z) > \lambda, \forall z \in N(y)$, 则称 f 在 y 处 λ -转移紧下半连续.

定义 2^[4] 二元组 (X, Γ) 称为 L -凸空间. 如果 X 是一拓扑空间, $\Gamma: \langle X \rangle \rightarrow 2^X \setminus \emptyset$ 是一集值映射, 满足 $\forall A = \{x_0, \dots, x_n\} \in \langle X \rangle$, 存在一个连续映射 $\varphi_A: \Delta_n \rightarrow \Gamma(A)$ 使得对任意 $B = \{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\} \in \langle A \rangle$, 有 $\varphi_A(\Delta_k) \subset \Gamma(B)$, 此处 Δ_k 表示顶点集 $\{e_{i_0}, \dots, e_{i_k}\}$ 的凸包. L -凸空间包含了拓扑线性空间并将 H -空间^[3]作为其特殊的情形.

设 (X, Γ) 为 L -凸空间, 子集 $D \subset X$ 称为是 L -凸的, 如果 $\forall A \in \langle D \rangle$, 有 $\Gamma(A) \subset D$. 函数 $f: X \rightarrow R$ 称为 L -拟凹(或 L -拟凸). 如果 $\forall r \in R$, 集合 $\{x \in X: f(x) > r\}$ 是 L -凸的(或 $\forall r \in R$, 集合 $\{x \in X: f(x) < r\}$ 是 L -凸的).

2 变分不等式解的存在性和截口定理

定理 1 设 (X, Γ) 为 L -凸空间, K 为 X 的紧子集, $\varphi, \psi : X \times X \rightarrow R$ 和 $f : X \rightarrow R$ 是 3 个函数, 且满足条件: (a) $f(x) - \varphi(x, y) - f(y)$ 在 x 处 0-转移紧下半连续; (b) 对任意的 $x \in K$ 以及对任意的 $\forall A \in \langle \{y \in X : f(x) > \varphi(x, y) + f(y)\} \rangle$, 有 $\Gamma(A) \subset \{y \in X : f(x) > \psi(x, y) + f(y)\}$; (c) $f(x) - \psi(x, y) - f(y)$ 在 $X \times X$ 上下半连续, 且 $\forall y \in X$, 集合 $\{x \in K : f(x) \leq \psi(x, y) + f(y)\}$ 是非空零调的, 则存在 $x_0 \in K$ 使得 $\varphi(x_0, y) \geq f(x_0) - f(y), \forall y \in X$.

证明 定义函数 $f', g' : X \times X \rightarrow R$ 为 $f'(x, y) = f(x) - \varphi(x, y) - f(y) \quad g'(x, y) = f(x) - \psi(x, y) - f(y) \quad \forall (x, y) \in X \times X$ 容易验证 f', g' 满足文献[4]中推论 1 的所有条件, 于是存在 $x_0 \in K$ 使得 $f'(x_0, y) \leq 0, \forall y \in X$, 也就是存在 $x_0 \in K$ 使得 $\varphi(x_0, y) \geq f(x_0) - f(y), \forall y \in X$.

定理 2 设 (X, Γ) 为 L -凸空间, K 为 X 的紧子集, 2 个映射 $T : X \rightarrow R^n$ 和 $\varphi : X \times X \rightarrow R^n$ 满足条件: (a) $\langle T(y), \varphi(x, y) \rangle$ 在 x 处 0-转移紧下半连续, 此处 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表内积; (b) 对任意的 $x \in K$ 及任意的 $\forall A \in \langle \{y \in X : \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle > 0\} \rangle$, 有 $\Gamma(A) \subset \{y \in X : \langle T(x), \varphi(y, x) \rangle < 0\}$; (c) $\langle T(x), \varphi(y, x) \rangle$ 在 $X \times X$ 上半连续, 且 $\forall y \in X$, 集合 $\{x \in K : \langle T(x), \varphi(y, x) \rangle \geq 0\}$ 是非空零调的, 则存在 $x_0 \in K$, 使得 $\langle T(y), \varphi(x_0, y) \rangle \leq 0, \forall y \in X$.

证明 $\forall (x, y) \in X \times X$, 定义 f, g 为 $f(x, y) = \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \quad g(x, y) = -\langle T(x), \varphi(y, x) \rangle$ 容易验证 f, g 满足文献[4]中推论 1 的所有条件, 因此, 存在 $x_0 \in K$ 使得 $f(x_0, y) \leq 0, \forall y \in X$, 也就是存在 $x_0 \in K$ 使得 $\langle T(y), \varphi(x_0, y) \rangle \leq 0, \forall y \in X$.

定理 3 设 X 为拓扑空间, (Y, Γ) 为 L -凸空间, K 为 X 的紧子集, M, N 为 $X \times Y$ 的子集, M 在 $X \times Y$ 中是闭的, 且满足条件: (a) 集值映射 $y \mapsto \{x \in X : (x, y) \in N\}$ 是转移紧闭的; (b) 对任意的 $x \in K$ 以及 $\forall A \in \langle \{y \in Y : (x, y) \notin N\} \rangle$, 有 $\Gamma(A) \subset \{y \in Y : (x, y) \notin M\}$; (c) 对任意的 $y \in Y$, 集合 $\{x \in K : (x, y) \in M\}$ 是非空零调的, 则存在一点 $x^* \in K$ 使得 $\{x^*\} \times Y \subset N$.

证明 $\forall (x, y) \in X \times Y$, 定义 f, g 如下: $f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in N \\ 1, & (x, y) \notin N \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in M \\ 1, & (x, y) \notin M \end{cases}$ 由 f 的定义, 有 $\forall y \in Y, \{x \in X : (x, y) \in N\} = \{x \in X : f(x, y) \leq 0\}$, 因此, 由文献[4]的引理 3 可知, f 在 x 处 0-转移紧下半连续. 由 (b) 和 f, g 的定义, 知道 $\forall x \in K, \forall A \in \langle \{y \in Y : f(x, y) > 0\} \rangle$, 有 $\Gamma(A) \subset \{y \in Y : g(x, y) > 0\}$. 下面验证 g 是下半连续的.

由于 $\forall \alpha \in R$, 集合 $\{(x, y) \in X \times Y : g(x, y) > \alpha\} = \begin{cases} \Phi & \alpha \geq 1 \\ X \times Y \setminus M & 0 \leq \alpha < 1 \\ X \times Y & \alpha < 0 \end{cases}$ 是开的, 因此, g 下半连续.

由 (c) 和 g 的定义知 $\forall y \in Y$, 集合 $\{x \in K : g(x, y) \leq 0\} = \{x \in K : (x, y) \in M\}$ 是非空零调的, 因此, 由文献[4]中的推论 1, 存在一点 $x^* \in K$, 使得 $f(x^*, y) \leq 0, \forall y \in Y$, 也就是存在一点 $x^* \in K$, 使得 $\{x^*\} \times Y \subset N$.

3 非合作博弈均衡的存在性

定理 4 设 (X, Γ_1) 和 (Y, Γ_2) 是 2 个 L -凸空间, K_1 和 K_2 分别是 X 和 Y 的紧子集, $f, g : X \times Y \rightarrow R$ 是 2 个函数, 且满足条件: (a) $\forall x \in K_1$, 集合 $\{y \in Y : f(x, y) > g(x, y)\}$ 是 L -凸的. (b) $\forall y \in K_2$, 集合 $\{x \in X : f(x, y) < g(x, y)\}$ 是 L -凸的. (c) 函数 $f(x, y) - g(x, y)$ 在 $X \times Y$ 上下半连续, 且 $\forall y \in Y$, 集合 $\{x \in K_1 : f(x, y) \leq g(x, y)\}$ 是非空零调的. (d) 函数 $f(x, y) - g(x, y)$ 在 $Y \times X$ 上半连续, 且 $\forall x \in X$, 集合 $\{y \in K_2 : f(x, y) \geq g(x, y)\}$ 是非空零调的, 则存在一个扰动的鞍点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$, 使得如下结论成立:

$$\forall (x, y) \in X \times Y, f(x_0, y) + [g(x_0, y_0) - g(x_0, y)] \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) + [g(x_0, y_0) - g(x, y_0)]$$

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} [f(x, y) - g(x, y)] = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} [f(x, y) - g(x, y)] = 0$$

证明 $\forall (x, y) \in X \times Y$, 令 $\Phi(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$, 则由(a), (c)以及文献[4]中的推论2可知, 存在点 $x_0 \in K_1$, 使得 $\Phi(x_0, y) \leq 0, \forall y \in Y$, 即 $f(x_0, y) \leq g(x_0, y), \forall y \in Y$. $\forall (y, x) \in Y \times X$, 再设 $\Psi(y, x) = g(x, y) - f(x, y)$, 则由(b), (d)以及文献[4]中的推论2可知存在点 $y_0 \in K_2$, 使得 $\Psi(y_0, x) \leq 0, \forall x \in X$, 也就是 $g(x, y_0) \leq f(x, y_0), \forall x \in X$, 从而可知 $f(x_0, y) - g(x_0, y) \leq 0 \leq f(x, y_0) - g(x, y_0), \forall (x, y) \in X \times Y$. 于是有

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) \quad (1)$$

$$f(x_0, y) - g(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) - g(x, y_0) \quad (2)$$

由式(2)可知

$$f(x_0, y) + [g(x_0, y_0) - g(x_0, y)] \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) + [g(x_0, y_0) - g(x, y_0)]$$

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} [f(x, y) - g(x, y)] \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} [f(x, y) - g(x, y)]$$

由于 $\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} [f(x, y) - g(x, y)] \geq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} [f(x, y) - g(x, y)]$ 自然成立, 因此

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} [f(x, y) - g(x, y)] = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} [f(x, y) - g(x, y)] = 0$$

定理5 设 $I = \{1, \dots, n\}$ 为博弈人集合, $\forall i \in I, X_i$ 为拓扑空间使得 $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 为 L -凸空间, K_i 为 X_i 的非空紧子集. $u_i: X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow R$ 为第 i 个人的收益函数, 且满足条件: (a) $[u_1(y_1, x_{-1}) - u_1(x)] + \dots + [u_n(y_n, x_{-n}) - u_n(x)]$ 在 $X \times X$ 上是下半连续的; (b) 对任何 $x \in K, \{y \in X: [u_1(y_1, x_{-1}) - u_1(x)] + \dots + [u_n(y_n, x_{-n}) - u_n(x)] > 0\}$ 是 L -凸的; (c) $y \in X$, 集合 $\{x \in K: [u_1(y_1, x_{-1}) - u_1(x)] + \dots + [u_n(y_n, x_{-n}) - u_n(x)] \leq 0\}$ 是非空零调的, 则存在一点 $x^* \in K$ 使得 x^* 是多人非合作博弈 $\Gamma = \{X_1, \dots, X_n; u_1, \dots, u_n\}$ 的一个 Nash 均衡.

证明 定义函数 $U: X \times X \rightarrow R$ 如下:

$$\forall x = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ 和 } y = \{y_1, \dots, y_n\} \in X$$

$$U(x, y) = [u_1(y_1, x_{-1}) - u_1(x)] + \dots + [u_n(y_n, x_{-n}) - u_n(x)]$$

容易验证 U 满足文献[4]中推论2的所有条件, 则有一点 $x^* \in K$ 使得

$$U(x^*, y) \leq 0 \quad \forall y \in X$$

固定 i , 并设 $y = (y_i, x_{-i}^*)$, 则可知

$$u_i(y_i, x_{-i}^*) - u_i(x_i^*, x_{-i}^*) + \sum_{j \neq i} [u_j(y_j, x_{-j}^*) - u_j(x_j^*, x_{-j}^*)] \leq 0 \quad (3)$$

又因为对任何 $j \neq i, x = (x_j, x_{-j}) = (y_j, x_{-j})$, 所以由式(3)得

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(y_i, x_{-i}^*), \forall y_i \in X_i \text{ 和 } \forall i \in I$$

从而知道 x^* 是多人非合作博弈 $\Gamma = \{X_1, \dots, X_n; u_1, \dots, u_n\}$ 的一个 Nash 均衡.

4 结 论

本文在一类更加广泛的空间—— L -凸空间的框架内, 在降低函数连续性以及集合凸性的情况下, 运用一个极大极小不等式得到了几个变分不等式解的存在性结果、一个截口定理, 以及关于非合作博弈 Nash 均衡的存在性结果, 从而推广了文献[3~4]中的相关结果.

参考文献:

- [1] AUBIN J P, EKELAND I. Nonlinear functional analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984: 110-111.
- [2] YUAN X Z. KKM theory and applications in nonlinear analysis[M]. New York: Dekker, 1999: 201-235.
- [3] LU Hai-shu, ZHANG Ji-hui. Minimax inequalities in the spaces without linear structure[J]. Taiwanese J Math, 2004, 8 (4): 703-712.
- [4] LU Hai-shu, TANG De-shan. An intersection theorem in L -convex spaces with applications[J]. J Math Anal Appl, 2005, 312 (1): 343-356.
- [5] TIAN G Q. Generalization of the FKKM theorem and the Ky Fan minimax inequality, with applications to maximal elements, price equilibrium, and complementarity[J]. Math Anal Appl, 1992, 170 (2): 457-471.

[6] LU Hai-shu,TANG De-shan.Generalizations of KKM theorem on L -convex spaces with applications[J].*南京大学学报 数学半年刊*, 2005,22 (2) 275-285.
[7] BARDARO C,CEPPITELLI R.Some further generalizations of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities[J].*Math Anal Appl*,1988,132 (3) 484-490.
[8] TAN K K.G-KKM theorems,minimax inequalities and saddle points[J].*Nonlinear Ana*,1997,30 (7) 4151-4160.

A minimax inequality in L -convex spaces and it application

LU Hai-shu¹, TANG De-shan², SHAN Yi-hong¹

(1. *Business School, Hohai University, Nanjing 210098, China* ;

2. *College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China*)

Abstract By using a minimax inequality in L -convex spaces, an analysis is made on the existence of the solutions to abstract variational inequality and variational-like inequality, the Ky Fan section theorem, and the equilibrium existence of perturbed zero-sum game for two persons and non-cooperative game for multiple players in L -convex spaces. As a conclusion, some new results about the existence of the solutions to abstract variational inequality and variational-like inequality and a Ky Fan section theorem in L -convex spaces without linear structure are drawn, and the result of the equilibrium existence of perturbed zero-sum game for two persons and non-cooperative game for multiple players are finally obtained. The conditions of the results in this paper are weak as compared with those in other literatures.

Key words minimax inequality ; variational inequality ; Ky Fan section theorem ; non-cooperative game ; acyclic set ; set-valued mapping

全国中文核心期刊 中国科技核心期刊
全国水利系统优秀期刊 华东地区优秀期刊 江苏省优秀期刊
《水利水电科技进展》征订启事

(邮发代号 28-244,CN32-1439/TV,ISSN1006-7647,双月刊)

《水利水电科技进展》主要刊登与水科学、水工程、水资源、水环境等学科有关的科技论文,设有水问题论坛、研究探讨、工程技术、水管理、专题综述、国外动态、科技简讯等栏目,适合与水科学、水工程、水资源、水环境等有关的科学研究人员、工程技术人员、科技管理人员以及大专院校师生阅读.

《水利水电科技进展》由邮局发行,邮发代号 28-244,2007 年每期定价 8 元,全年 6 期共计 48 元.读者亦可直接向编辑部订阅.欢迎个人和单位直接汇款订阅或函索订单.编辑部地址:210098 南京市西康路 1 号河海大学《水利水电科技进展》编辑部.联系电话:025-83786335,E-mail:jz@hhu.edu.cn,http://kkb.hhu.edu.cn.汇款时务请注明“订水利水电科技进展”.