

马尔柯夫链在工程检验环节中的应用

郑苏娟

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 对工程设计进行检验是纠正设计错误、完善设计方案的必要手段.基于时间连续的马尔柯夫链建立了工程检验环节的数学模型,并通过实例说明检验校对可以提高设计的正确率,保证系统的正常运行.最后得出一个重要结论:随着时间的不断增大,设计系统正常工作的正确率几乎不变.

关键词 马尔柯夫链;检验环节;数学模型;正确率

中图分类号 :TB114.2 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2006)05-0596-03

各种工程设计,如桥梁、煤气管网、船舶等的设计都极其复杂.要完善设计,改正设计者的错误,检验是必不可少的环节.在船舶检验中,审核校对将设计过程看成一个可维修系统,当设计者不犯错误时,系统处于正常工作状态,否则系统处于非正常工作状态,即检修状态.审核校对之后,设计者重新开始工作,这时系统又处于正常工作状态,与前面的状态无关.审核校对这一环节可以大大提高设计的正确率,实际上是一个时间连续的随机过程,可以用时间连续的马尔柯夫链^[1]来描述.本文基于马尔柯夫链建立数学模型,并且仅研究一个设计者和一个检验员的情形.

1 数学模型

定义^[2] 设随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 状态空间 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. 如果对于 $\forall t, \Delta t > 0$ 及 $i, j, x(u) \in E, 0 \leq u < \Delta t$, 有

$$P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < t\} = P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\}$$

则称 $X(t)$ 为时间连续的马尔柯夫链. 称 $P\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = p_{ij}(t, t + \Delta t)$ 为时刻 t 时的转移概率.

如果这个转移概率与 t 无关, 仅与 Δt 有关, 即

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = p_{ij}(\Delta t)$$

则称此马尔柯夫链是齐次的. 应用上主要研究齐次马尔柯夫链.

在建立数学模型^[3]之前, 先进行如下假设^[4].

a. 设计过程为正常工作与犯错误 2 个独立事件交替出现的过程, 与其他事件无关. 用“0”和“1”分别表示这 2 个状态, 即状态空间 $E = \{0, 1\}$. 此时随机过程为

$$X(t) = \begin{cases} 0 & t \text{ 时刻系统正常工作} \\ 1 & t \text{ 时刻系统发生故障} \end{cases}$$

b. 若设计过程中设计者的犯错率为 λ , 犯错的时间用随机变量 T 表示, 则 T 是一个负指数分布的非负随机变量, 即

$$A(t) = P\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0, t \geq 0)$$

c. 若设计过程中检验的校对率为 μ , 随机变量 τ 表示检验校对的时间, 则 τ 是一个负指数分布^[5]的非负随机变量, 即

$$B(t) = P\{\tau \leq t\} = 1 - e^{-\mu t} \quad (\mu > 0, t \geq 0)$$

d. 在时刻 $(t, t + \Delta t)$ 内, 只发生一次错误与校对.

基于上述假设及定义 ,可以得到

$$\begin{aligned} p_{00}(\Delta t) &= \{X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 0\} = P\{T > t + \Delta t | T > t\} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ p_{01}(\Delta t) &= P\{X(t + \Delta t) = 1 | X(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ p_{10}(\Delta t) &= P\{X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 1\} = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t) \\ p_{11}(\Delta t) &= P\{X(t + \Delta t) = 1 | X(t) = 1\} = e^{-\mu \Delta t} = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

其中 $o(\Delta t)$ 为高阶无穷小.

设 $p_0(t) = P\{X(t) = 0\}$, $p_1(t) = P\{X(t) = 1\}$. 下面求 $p_0(t)$, $p_1(t)$.

由全概率公式^[6]可以得到

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= P\{X(t + \Delta t) = 0\} = P\{X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 0\} \cdot P\{X(t) = 0\} + \\ &P\{X(t + \Delta t) = 0 | X(t) = 1\} \cdot P\{X(t) = 1\} = p_{00}(\Delta t) \cdot p_0(t) + p_{10}(\Delta t) \cdot p_1(t) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = \frac{[p_{00}(\Delta t) - 1]p_0(t) + p_{10}(\Delta t)p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 可得

$$p'_0(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \tag{1}$$

同理

$$\begin{aligned} p_1(t + \Delta t) &= P\{X(t + \Delta t) = 1\} = P\{X(t + \Delta t) = 1 | X(t) = 0\} \cdot P\{X(t) = 0\} + \\ &P\{X(t + \Delta t) = 1 | X(t) = 1\} \cdot P\{X(t) = 1\} = p_{01}(\Delta t) \cdot p_0(t) + p_{11}(\Delta t) \cdot p_1(t) \end{aligned}$$

因此

$$p'_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t)$$

注意到 $p_1(t) = 1 - p_0(t)$, 代入式(1)中, 得到一个一阶非齐次线性微分方程

$$p'_0(t) + (\lambda + \mu)p_0(t) = \mu$$

由一阶非齐次线性微分方程的通解公式^[7]可得

$$p_0(t) = e^{-\int(\lambda + \mu)dt} \left(\int \mu e^{\int(\lambda + \mu)dt} + C \right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + Ce^{-(\lambda + \mu)t} \tag{2}$$

设在设计初始时, 系统处于良好状态, 即 $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$. 将其代入式(2), 得

$$C = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

因此

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

所以

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

则在 t 时刻, 经检验校对后, 设计系统正常工作的概率(称为正确率^[8])为

$$R(t) = p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 时, 设计过程的正确率为

$$R = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

可见, $t \rightarrow +\infty$ 时的极限肯定不会与 t 有关, 得到定理 1.

定理 1 随着时间的不断增大, 设计系统正常工作的正确率几乎不变, 恒为 $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

2 应用实例

设某设计者正确工作的时间服从参数为 λ 的指数分布, λ 为 0.005 5/h. 求 (a) 若在设计系统中没有检验校对, 那么工作 100 h 时的正确率是多少? (b) 若在设计系统中有检验校对, 并且校对率 μ 为 0.071 0/h, 那么工作 100 h 时的正确率又是多少?

解 (a) 没有检验时, 设计的正确率为

$$R(100) = e^{-0.0055 \times 100} = 0.577$$

(b) 有检验校对时, 设计的正确率为

$$R(100) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu) \times 100} = \frac{0.0710}{0.0055 + 0.0710} + \frac{0.0055}{0.0055 + 0.0710} e^{-(0.0055 + 0.0710) \times 100} = 0.928$$

可见检验校对可以提高设计的正确率, 保证系统正常工作.

注意到时间 $t = 100$ 足够大, 而 $R = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \approx 0.928$, 与 $R(100)$ 接近相等, 所以正确率几乎是不变的.

3 结 语

本文利用时间连续的马尔柯夫链建立了工程检验环节的数学模型, 并通过实例说明在工程设计中, 检验是必不可少的环节.

参考文献:

- [1] 夏乐天, 朱永忠. 工程随机过程[M]. 南京: 河海大学出版社, 2000: 59-103.
- [2] 咸美新. 马氏链在生产决策中的应用[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2000(4): 31-34.
- [3] BHARUCHA-REID A T. 马尔柯夫过程论初步及其应用[M]. 杨纪柯, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1979: 388-440.
- [4] 向阳, 李玉梅. 指数分布在嵌入马氏链构造中的应用[J]. 怀化学院学报, 2003(4): 23-25.
- [5] 复旦大学. 概率论[M]. 北京: 人民教育出版社, 2004: 10-110.
- [6] 丁莲珍, 钮群, 郑苏娟. 高等数学(上)[M]. 南京: 河海大学出版社, 2004: 196-201.
- [7] 亨利 E J. 可靠性工程与风险分析[M]. 吕应中, 译. 北京: 原子能出版社, 1988: 1-88.
- [8] 张宇山, 廖芹. 马尔可夫链在股市分析中的若干应用[J]. 华南理工大学学报, 2003(7): 74-77.

Application of Markov chains to test stage of engineering project

ZHENG Shu-juan

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract A case study is given to show that the test of design schemes is necessary for designers to correct mistakes and perfect design, and that it can improve the correct rate of the design, and ensure the normal operation of the system. By using time continuous Markov chains, a mathematical model for the test stage is established. It is concluded that, with the increase of test time, the correct rate of the design system under normal operational condition approaches to a constant.

Key words Markov chains; test stage; mathematical model; correct rate