

UAH B 样条与均匀 B 样条关系研究

钱 江¹, 刘华勇²

(1. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098; 2. 安徽建筑工业学院数理系, 安徽 合肥 230022)

摘要 推出了当参数 $\alpha \rightarrow 0^+$, $\alpha \rightarrow +\infty$ 时 k 阶均匀双曲多项式 B 样条(Uniform Algebraic Hyperbolic B-splines :UAH B-splines)的极限形式. 对 4 阶 UAH B 样条重新参数化, 在给定误差范围内, UAH B 样条可由 4 阶均匀 B 样条精确逼近. 最后, 用 UAH B 样条精确表示了双曲正弦曲线与指数曲线, 并揭示了 UAH B 样条曲面与均匀 B 样条曲面间的关系.

关键词 UAH B 样条; C-B 样条; 均匀 B 样条; 极限; 逼近

中图分类号 O17 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2006)05-0599-04

在计算机辅助几何设计 CAGD(Computer aided Geometric Design)中, 以多项式为基底的 Bézier 与 B 样条是构造自由曲线曲面的有力工具^[1-2], 但其不能精确表示工程中常用的某些曲线, 如圆弧、正弦、指数曲线等, 故以非多项式为基底的造型技术应运而生. Pottman 等^[3]提出了 Helix 样条, 张纪文^[4-5]构造了 C-Bézier 曲线和 C-B 样条曲线, 用后者精确表示了圆弧和椭圆, 并且给出了其他表达形式, 大大提高了计算速度. 杨松林^[6]研究了 C-Bézier 曲线与 Bézier 曲线的光滑拼接条件. 吕勇刚等^[7-8]对高阶均匀三角多项式和均匀双曲多项式的 B 样条进行了研究, 并利用后者精确表示了一支双曲线与悬链线, 但未揭示其与均匀 B 样条之间的关系.

本文通过 UAH B 样条在参数 $\alpha \rightarrow 0^+$, $\alpha \rightarrow +\infty$ 时极限的研究, 建立了 UAH B 样条与均匀 B 样条之间的关系, 给出了 4 阶 UAH B 样条的等价表达式, 并藉此分析了 4 阶 UAH B 样条与其极限形式, 即控制多边形及 4 阶均匀 B 样条之间的逼近效果.

1 UAH B 样条的极限性质

设 $t_i = i\alpha$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为对参数 t 轴作均匀分割得到的一组节点, 其中 α 是区间长度 ($\alpha > 0$). 利用文献 [8] 中的 k 阶均匀双曲多项式 B 样条基函数递推关系式推得 3 阶 UAH B 样条基函数为

$$\begin{cases} N_{-2}(\alpha, t) = (\cosh(\alpha - t) - 1)k_3 \\ N_0(\alpha, t) = (\cosh t - 1)k_3 \\ N_{-1}(\alpha, t) = (2\cosh\alpha - \cosh t - \cosh(t - \alpha))k_3 \\ k_3 = 1/(2\cosh\alpha - 1) \end{cases} \quad t \in [0, \alpha] \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

定理 1

a. 当 $\alpha \rightarrow 0^+$ 时, n ($n \geq 3$) 阶 UAH B 样条基极限为 n 阶均匀 B 样条基.

b. 当 $\alpha \rightarrow +\infty$ 时, n ($n \geq 3$) 阶 UAH B 样条基极限为

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_{-(i-1),n}(\alpha, t) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_{0,n}(\alpha, t) = 0 \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_{-i,n}(\alpha, t) = U_{-(i-1),n-2}(\tau) \quad (2)$$

式中 $U_{-(i-1),n-2}(\tau)$ ($1 \leq i \leq n-2$) 是 $n-2$ 阶均匀 B 样条基, $t = \alpha\tau$, $\tau \in (0, 1)$.

证明

a. 对 n 利用数学归纳法. 令 $t = \alpha\tau$, $\tau \in [0, 1]$, 直接计算可知, 当 $n = 3$ 时, 结论成立.

设 $n = k$ 时, 结论成立. 记 $N_{-i,k}(t) = N_{-i,k}(\alpha\tau)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} N_{-i,k}(\alpha\tau) = U_{-i,k}(\tau)$, 则当 $n = k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (N_{-i,k+1}(\alpha\tau)) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha N'_{-i,k+1}(\alpha\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (N_{-i,k}(\alpha\tau) - N_{-i+1,k}(\alpha\tau)) = \\ &U_{-i,k}(\tau) - U_{-i+1,k}(\tau) = U'_{-i,k+1}(\tau) \end{aligned}$$

又 $g_{-i,k+1}(0)=U_{-i,k+1}(0)$ 故 $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_{-i,k+1}(\tau)=U_{-i,k+1}(\tau)$ 从而当 $n=k+1$ 时 结论成立 证得.

b. 对 n 利用数学归纳法. 令 $t=\alpha\tau, \tau \in (0,1)$ 方法同 a. 证毕.

定义 1 设控制顶点 $P_0, P_1, \dots, P_m$ 相应的 $n(n \geq 3)$ 阶 UAH B 样条曲线第 l 段定义为

$$p_{n,l}(\alpha,t)=\sum_{i=0}^{n-1}P_{i+l-(n-1)+i,n}(\alpha,t) \quad (t \in [0,\alpha])$$

(3)

式中 $l=0,1,\dots,m-n+1, N_{-(n-1),n}(\alpha,t), N_{-(n-2),n}(\alpha,t), \dots, N_{0,n}(\alpha,t)$ 是 n 阶 UAH B 样条基.

定理 2

a. 当 $\alpha \rightarrow 0^+$ 时, $n(n \geq 3)$ 阶 UAH B 样条曲线逼近于 n 阶均匀 B 样条曲线 其控制多边形不变.

b. 当 $\alpha \rightarrow +\infty$ 时, $n(n \geq 3)$ 阶 UAH B 样条曲线逼近于 $n-2$ 阶均匀 B 样条曲线 且根据定义 1 第 l 段曲线的原控制多边形 $P_l, P_{l+1}, \dots, P_{l+(n-1)}$ 变为新控制多边形 $P_{l+1}, P_{l+2}, \dots, P_{l+(n-2)}$].

2 4 阶 UAH B 样条第 2 种表达式与误差估计

易推得 $[0,\alpha]$ 上的一组非零 4 阶 UAH B 样条基为

$$\begin{cases} N_{-3}(\alpha,t)=[(\alpha-t)-\sinh(\alpha-t)]k \\ N_0(\alpha,t)=(t-\sinh t)k \\ N_{-2}(\alpha,t)=[2\sinh(\alpha-t)+t-\sinh t-\chi(\alpha-t)\cosh\alpha]k \\ N_{-1}(\alpha,t)=[\alpha-t-\sinh(\alpha-t)+2\sinh t-2t\cosh\alpha]k \\ k=(\sinh\alpha-\alpha)/[\alpha(\cosh\alpha-1)] \quad t \in [0,\alpha] \quad \alpha>0 \end{cases}$$

(4)

令 $\tau=t/\alpha \in [0,1]$ 对 4 阶 UAH B 样条重新参数化 得到第 2 种表达式

$$\begin{cases} N_0(\tau)=N_{-3}(\alpha,\alpha\tau)=G \cdot (1-\tau)^3H(\alpha(1-\tau)) \\ N_3(\tau)=N_0(\alpha,\alpha\tau)=G \cdot \tau^3H(\alpha\tau) \\ N_1(\tau)=N_{-2}(\alpha,\alpha\tau)=N_3(\tau)-2N_0(\tau)+(1-\tau) \\ N_2(\tau)=N_{-1}(\alpha,\alpha\tau)=N_0(\tau)-2N_3(\tau)+\tau \\ H(x)=(\sinh x-x)/x^3 \quad G=\alpha^2/(\chi \cosh\alpha-1) \quad \alpha>0 \end{cases}$$

(5)

推论 1

a. 当 $\alpha \rightarrow 0^+$ 时 4 阶 UAH B 样条基逼近于 4 阶均匀 B 样条基:

$$\begin{cases} \bar{N}_0(\tau)=(1-\tau)^3/6 \\ \bar{N}_3(\tau)=\tau^3/6 \\ \bar{N}_1(\tau)=\bar{N}_3(\tau)-2\bar{N}_0(\tau)+(1-\tau)=(3\tau^3-6\tau^2+4)/6 \\ \bar{N}_2(\tau)=\bar{N}_0(\tau)-2\bar{N}_3(\tau)+\tau=(-3\tau^3+3\tau^2+3\tau+1)/6 \end{cases} \quad (\tau \in [0,1])$$

(6)

b. 当 $\alpha \rightarrow +\infty$ 时 令 $t=\alpha\tau, \tau \in (0,1)$ 得到 4 阶 UAH B 样条基极限

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_{-3}(\alpha,t)=\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_0(\alpha,t)=0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_{-2}(\alpha,t)=1-\tau \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} N_{-1}(\alpha,t)=\tau \end{cases}$$

(7)

定理 3 4 阶 UAH B 样条曲线与相应控制多边形之间的距离不超过 UAH B 样条曲线断点(breakpoint)与相应控制顶点距离的最大值 如图 1 所示 ($\alpha=1.35; \tau=0.25$).

证明 设第 $l(l=0,1,\dots,m-3)$ 段 4 阶 UAH B 样条曲线为

$$p_{\chi}(\tau)=N_0(\tau)P_l+N_1(\tau)P_{l+1}+N_2(\tau)P_{l+2}+N_3(\tau)P_{l+3}=$$
$$(1-\tau)P_{l+1}+\tau P_{l+2}+(P_l-2P_{l+1}+P_{l+2})N_0(\tau)+$$
$$(P_{l+1}-2P_{l+2}+P_{l+3})N_3(\tau)$$

设断点为 $p_{\chi}(0), p_{\chi}(1)$ 相应顶点分别为 P_{l+1}, P_{l+2} 记 $d_{\max}=\max\{|p_{\chi}(0)-P_{l+1}|, |p_{\chi}(1)-P_{l+2}|\}$. 边 $P_{l+1}P_{l+2}$ 之间的点可表示为 $P_s(\tau)=(1-\tau)P_{l+1}+\tau P_{l+2}$. 与曲线上相应点 $p_{\chi}(\tau)$ 的距离为

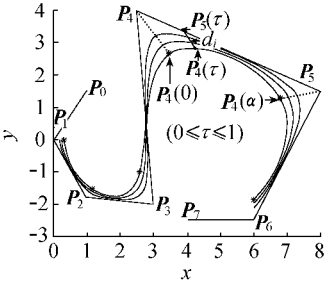


图 1 4 阶 UAH B 样条与其控制多边形间误差估计

Fig.1 Error estimation between 4-order UAH B-spline curves and their control polygon

$$d_{\tau} = |p_4(\tau) - P_3(\tau)| = 2|(p_4(0) - P_{l+1})N_0(\tau) + (p_4(1) - P_{l+1})N_3(\tau)|/k \leqslant$$
$$2d_{\max}(N_0(\tau) + N_3(\tau))/k \leqslant d_{\max} \quad \tau \in [0, 1]$$
$$k = (\sinh\alpha - \alpha)[\alpha(\cosh\alpha - 1)] \quad \alpha > 0$$

将该结论推广到整条曲线,则定理得证.证毕.

定理 4 给定一组控制顶点,则其所对应的 4 阶 UAH B 样条曲线与 4 阶均匀 B 样条曲线间的最大距离不超过 2 条曲线上相应断点之间的最大距离,如图 2 所示($\alpha=3.5$; $\tau=0.25$).

证明 设同一控制多边形下,第 l ($l=0, 1, \dots, m-3$) 段 4 阶 UAH B 样条与均匀 B 样条曲线分别为

$$p_4(\tau) = N_0(\tau)P_l + N_1(\tau)P_{l+1} + N_2(\tau)P_{l+2} + N_3(\tau)P_{l+3}$$
$$q_4(\tau) = \bar{N}_0(\tau)P_l + \bar{N}_1(\tau)P_{l+1} + \bar{N}_2(\tau)P_{l+2} + \bar{N}_3(\tau)P_{l+3} \quad (\tau \in [0, 1])$$
记 $m_l = \max\{|P_l - 2P_{l+1} + P_{l+2}|, |P_{l+1} - 2P_{l+2} + P_{l+3}|\}$,于是 2 条曲线上相应点间的距离为

$$db = |p_4(\tau) - q_4(\tau)| = |(P_l - 2P_{l+1} + P_{l+2})N_0(\tau) + (P_{l+1} - 2P_{l+2} + P_{l+3})N_3(\tau) - [(P_l - 2P_{l+1} + P_{l+2})(1 - \tau)^3 + (P_{l+1} - 2P_{l+2} + P_{l+3})\tau^3]/6| \leqslant m_l|N_0(\tau) + N_3(\tau) - [(1 - \tau)^3 + \tau^3]/6| \leqslant m_l(1/3 - k)/2$$
$$k = (\sinh\alpha - \alpha)[\alpha(\cosh\alpha - 1)] \quad \alpha > 0 \quad \tau \in [0, 1]$$

证毕.

定理 4 表明,当 4 阶 UAH B 样条逼近 4 阶均匀 B 样条时,其误差很小,可由式(8)精确表示.

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,4 阶 UAH B 样条与 C-B 样条^[3]从两侧逼近于均匀 4 阶 B 样条.当 α 增大时,由式(8)可知,4 阶 UAH B 样条与 4 阶均匀 B 样条间误差的绝对值增大,表明 4 阶 UAH B 样条远离其极限状态,向控制多边形逼近,即其凸包性优于 4 阶均匀 B 样条与 C-B 样条.

3 应用实例

4 阶 UAH B 样条可以精确表示悬链线^[8].

定理 5 (双曲正弦曲线)设位于双曲正弦曲线 $f(x) = a\alpha \sinh(x/b)/\sinh\alpha$ 上的控制顶点为

$$\begin{cases} P_0(b(-3\alpha + \theta), a\alpha \sinh(-3\alpha + \theta)/\sinh\alpha) \\ P_1(b(-2\alpha + \theta), a\alpha \sinh(-2\alpha + \theta)/\sinh\alpha) \\ P_2(b(-\alpha + \theta), a\alpha \sinh(-\alpha + \theta)/\sinh\alpha) \\ P_3(b\theta, a\alpha \sinh(\theta)/\sinh\alpha) \\ P_4(b(\alpha + \theta), a\alpha \sinh(\alpha + \theta)/\sinh\alpha) \\ P_5(b(2\alpha + \theta), a\alpha \sinh(2\alpha + \theta)/\sinh\alpha) \\ P_6(b(3\alpha + \theta), a\alpha \sinh(3\alpha + \theta)/\sinh\alpha) \end{cases} \quad (9)$$

将其代入 4 阶 UAH B 样条曲线式(3),则得到一段双曲正弦曲线

$$(x(t), y(t)) = (b(t + \theta), a\alpha \sinh(t + \theta)) \quad (10)$$

式中 $t \in [0, \alpha]$, $\alpha > 0$, θ 为任意实数.如图 3(a)所示($a=2$, $b=1.6$, $\alpha=1$, $\theta=0$).

定理 6 (指数曲线)设位于指数曲线 $y=f(x) = a\alpha \cdot e^x/\sinh\alpha$ 上的控制顶点为

$$\begin{cases} P_0(\theta, a\alpha e^\theta/\sinh\alpha) \\ P_1(\alpha + \theta, a\alpha e^{\alpha+\theta}/\sinh\alpha) \\ P_2(2\alpha + \theta, a\alpha e^{2\alpha+\theta}/\sinh\alpha) \\ P_3(3\alpha + \theta, a\alpha e^{3\alpha+\theta}/\sinh\alpha) \\ P_4(4\alpha + \theta, a\alpha e^{4\alpha+\theta}/\sinh\alpha) \\ P_5(5\alpha + \theta, a\alpha e^{5\alpha+\theta}/\sinh\alpha) \end{cases} \quad (11)$$

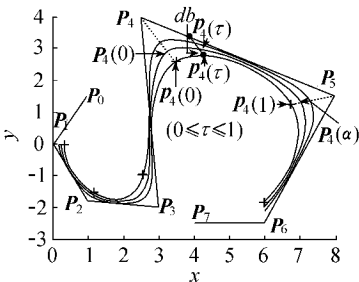


图 2 4 阶 UAH B 样条与 4 阶均匀 B 样条间的误差

Fig.2 Error between 4-order UAH B-splines and 4-order uniform B-splines

将其代入 4 阶 UAH B 样条曲线式(3),则得到一段指数函数

(x(t),y(t))=(t+θ,ae^{t+θ}) (12)

式中 t∈[0,α],α>0,θ 为任意实数,如图 3(b)所示(a=1,b=1.6,α=1,θ=0).

4 UAH B 样条曲面

定义 2 m×n 阶 UAH B 样条张量积曲面表示为

p_{m,n}(s,t)=sum_{k=1}^{l+3}sum_{i=0}^msum_{j=0}^nP_{i,j,k}N_{i,m}(alpha_i,s)N_{j,n}(beta_j,t) (13)

s∈[0,α_i] t∈[0,β_j] α_i,β_j>0 i=0,1,...,m j=0,1,...,n

式中:N_{i,m}(s),N_{j,n}(t)——m,n 阶 UAH B 样条基;p_{i,j,k}——控制顶点.

UAH B 样条曲面具有下列极限性质(a)令α=max{α_i},β=max{β_j},则当α,β→0+时,m×n 阶 UAH B 样条张量积曲面式(13)的极限为 m×n 阶均匀 B 样条曲面.(b)令ᾱ=min{α_i},β̄=min{β_j},则当ᾱ,β̄→+∞时,m×n 阶 UAH B 样条张量积曲面式(13)的极限为(m-2)×(n-2)阶均匀 B 样条曲面.

5 结 论

当α→0+,α→+∞时 4 阶 UAH B 样条分别逼近于 4 阶均匀 B 样条与控制多边形,并推导出了具体误差公式.计算结果表明,逼近控制多边形的凸包性优于 4 阶均匀 B 样条和 C-B 样条.利用 4 阶 UAH B 样条可以精确表示一段双曲正弦与指数曲线,这在几何造型中具有一定的应用价值.

参考文献:

[1] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计[M].北京:高等教育出版社,2001:1-34.
[2] 施法中.计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M].北京:北京航空航天大学出版社,1994:1-30.
[3] POTTMAN H,WAGNER M G. Helix splines as an example of affine Tchebycheffian splines[J]. Adv Comput Math,1994(2):123-142.
[4] ZHANG Ji-wen. C-curves:an extension of cubic curves[J]. Computer Aided Geometric Design,1996,13:199-217.
[5] ZHANG Ji-wen. Two different forms of C-B-splines[J]. Computer Aided Geometric Design,1997,14:31-41.
[6] 杨松林. C-Bézier 曲线[J]. 苏州大学学报:自然科学版,2003,19(2):1-7.
[7] 吕勇刚,汪国昭,杨勋年. 均匀三角多项式 B 样条曲线[J]. 中国科学:E 辑,2002,32(2):281-288.
[8] LU Yong-gang,WANG Guo-zhao,YANG Xun-nian. Uniform hyperbolic polynomial B-spline curves[J]. Computer Aided Geometric Design,2002,19:379-393.

Relationship between UAH B-splines and uniform B-splines

QIAN Jiang¹, LIU Hua-yong²

(1. College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. Department of Mathematics and Physics, Anhui Institute of Architecture and Industry, Hefei 230022, China)

Abstract: The limiting form for the k-order uniform algebraic hyperbolic B-splines (UAH B-splines) is derived at parameter α→0+ and α→+∞. A new re-parametrized form of the 4-order UAH B-splines is worked out. Any UAH B-splines can be approximated by the 4-order uniform B-splines at a high accuracy within an error range. As an application, a hyperbolic sine curve and an exponential curve are expressed accurately by the UAH B-splines. Finally, the relationship between UAH B-spline surface and uniform B-spline surface is studied.

Key words: UAH B-spline; C-B-spline; uniform B-splines; limit; approximation

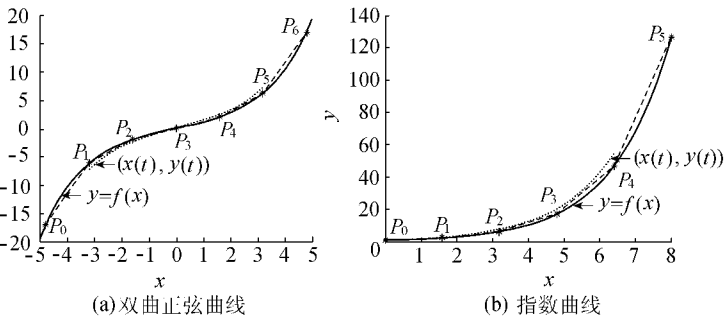


图 3 由 4 阶 UAH B 样条精确表示的曲线
Fig.3 Curves expressed by 4-order UAH B-splines at a high accuracy